licence

COURS DE TOPOLOGIE

(de M. Speder)

Cours de topologie de M. Speder

Licence 1978-79 à l'université de Nice

Notes prises par son étudiant D.-J. Mercier

COURS DE

TOPO TOPOLOGIE

M. SPEDER

Espaces topologiques et espaces métriques
Le Théorème de Baire
Théorie des filtres
Espaces vectoriels normés -
Théorème de Stone - Weierstrass
Hilbert
→ Formes hermitiennes dans un espace de dim fini - orthogonalité
Bases hilbertiennes.
Opérateurs hermitiens - Opérateurs compacts

Notes sur les bases de Topologie

Définition : $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ (E un ensemble)

$\mathcal{B}$ est une "base de topologie" ssi

1) $\forall A, B \in \mathcal{B} \quad A \cap B = \bigcup_{i \in I} A_i$ où $A_i \in \mathcal{B}$
2) $E = \bigcup_{i \in I} A_i$ où $A_i \in \mathcal{B}$

Proposition : Si $\mathcal{B}$ est une base de topologie, la plus petite topologie contenant $\mathcal{B}$ est appelée la topologie engendrée par $\mathcal{B}$. C'est la topologie dont l'ensemble des ouverts $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ est défini par l'une des assertions équivalentes suivantes :

1) $U \in \mathcal{O} \iff \forall x \in U \ \exists B \in \mathcal{B} \ x \in B \subset U$
2) $U \in \mathcal{O} \iff U = \bigcup_{i \in I} B_i$ où $B_i \in \mathcal{B}$

Application :

* (E, d) espace métrique. La topologie de (E, d), dite topologie associée à la distance d, est la topologie de base

$$\mathcal{B} = \{ B(x, r) \ / \ x \in E \text{ et } r \geq 0 \}$$

* topologie produit : Si E_i, $i \in I$, désignent des e. topolo_ _giques, définissons un rectangle ouvert par un sous-ensemble de $\prod_{i \in I} E_i$ de la forme $\prod_{i \in I} A_i \times \prod_{i \notin I} E_i$ où $I \subset J$, I fini.

Alors, la topologie définie sur $\prod_{i \in I} E_i$, appelée topologie produit de $\prod_{i \in I} E_i$, est la topologie de base :

$$\mathcal{B} = \{ \text{rectangles ouverts de } \prod_{i \in I} E_i \}$$

Espaces métriques - Espaces topologiques

Espaces métriques - Définitions générales

1° Définitions

Ensemble E $\quad d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$

sera une distance sur E ssi : $\forall x, y, z \in E$

$* \ d(x,y) = 0 \iff x = y$

$* \ d(x,y) = d(y,x)$

$* \ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Un espace métrique est un ensemble E muni d'une distance d : (E,d)
Soit $F \subset E$ $\quad (E,d)$ métrique. Alors $(F, d|_{F \times F})$ est aussi un espace métrique = ss espace métrique de (E,d)

- d_1 et d_2 deux distances sur E.

d_1 et d_2 équivalentes $\iff \exists K_1 > 0 \ \exists K_2 > 0$
$\forall x, y \in E$ on ait :
$K_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq K_2 d_1(x,y$

2° Exemples

o) (E,d) $\quad E'$ $\quad f : E \to E'$ bijective.
Alors $d'(x', y') = d(f^{-1}(x'), f^{-1}(y'))$ distance sur E'. C'est la "distance transportée de d par f".

i) E ens qq $\quad d(x,y) = 1$ si $x \neq y$ forme une distance sur E. C'est la distance "discrète".

ii) $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$

$x = (x_1, ---, x_n)$

$y = (y_1, ---, y_n)$

$$\begin{cases} d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| \\ d_2(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ d_\infty(x,y) = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k| \end{cases}$$

Ces trois distances sont équivalentes, puisque :

$$d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq n\, d_\infty$$

iii) Espace normé : espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une norme.

Rappel norme : $n : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

$\forall x, y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

* $n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
* $n(\lambda x) = |\lambda|\, n(x)$
* $n(x+y) \leq n(x) + n(y)$

On notera $n(x) = \|x\|$.

Un espace vectoriel normé est un espace métrique pour $d(x,y) = \|x-y\|$

Deux normes sur le m̂ espace vectoriel E sont équivalentes ssi les distances qu'elles définissent sont $\sim$, ou encore ssi :

$$\exists K_1 > 0 \text{ et } K_2 > 0 \quad \forall x \in E \quad K_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq K_2 \|x\|_1$$

Exemples d'espaces normés :

$\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$

$$\begin{cases} \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \\ \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k| \end{cases}$$

les distances sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ définies au ii) "dérivent" de ces normes.

Autre exemple : ℓ^∞ = ensemble des suites bornées dans $\mathbb{C}$

$$= \{x = (x_1, \dots, x_k, \dots) \,/\, \forall k \ x_k \in \mathbb{C} \text{ et } \sup_{1 \le k < \infty} |x_k| < \infty\}$$

$\|x\|_\infty = \sup_{1 \le k < \infty} |x_k|$ est une norme sur ℓ^∞

$(1 \le p < +\infty)$ $\ell^p = \{x = (x_1, \dots, x_k, \dots) \,/\, \forall k \ x_k \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}$
(Vérifier qu'il s'agit d'un ev)

$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur ℓ^p

(Stabilité de + et inégalité triangulaire grâce à l'inégalité de Hölder)

Autre exemple : $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}(A)$ = ensemble des fonctions bornées sur A (ens qq) dans $\mathbb{C}$. Alors,

$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$ norme sur $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}(A)$
(norme de la convergence uniforme)

$f, g \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}(A)$ $x \in A$

$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|$
$\le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

Donc $\sup_{x \in A} |(f+g)(x)| = \|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$
(Passer au sup d'abord à droite !)

• $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$ fonctions continues de $I = [0,1]$ dans $\mathbb{C}$

$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$ norme de la convergence uniforme

$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ " " de moyenne

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)^2| \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$ norme de cv. en moyenne quelconque

inégalité triangulaire grâce à l'inégalité de Hölder Minkowsky :

$$\left(\int_0^1 |(f+g)(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 |g(r)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ces normes ne sont pas équivalentes. ($\mathcal{C}_c(I)$ est un espace vectoriel de dimension infinie, et les normes ne sont pas nécessairement équivalentes)

$\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$
Pour $I = [0,1]$
$\forall t \in I$
$\|f\|_1 \leq \underbrace{\int_I \|f\|_\infty dt}_{= \|f\|_\infty}$
$\|f\|_1 \leq \|f\|_2$ prendre $g = 1 \ \forall t$

iv) (E_1, δ_1) (E_2, δ_2) 2 espaces métriques

$E_1 \times E_2$ $\quad x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ $\in E_1 \times E_2$

$$* \begin{cases} d_1(x,y) = \delta_1(x_1,y_1) + \delta_2(x_2,y_2) \\ d_2(x,y) = \left(\delta_1(x_1,y_1)^2 + \delta_2(x_2,y_2)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ d_\infty(x,y) = \operatorname{Sup}(\delta_1(x_1,y_1), \delta_2(x_2,y_2)) \end{cases}$$

3 distances sur $E_1 \times E_2$ équivalentes car :

$$d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq 2 d_\infty$$

Espace métrique produit de (E_1, δ_1) par (E_2, δ_2) :

$$(E_1 \times E_2, \ d_\infty)$$

choix arbitraire, les 3 distances étant tout aussi canoniques. Mais ces distances définiront la même topologie produit !

3°/ Autres définitions

- $f : (E_1, d_1) \longrightarrow (E_2, d_2)$ est une isométrie ssi elle conserve la distance, c.à.d ssi :
{ bijection linéaire

$\forall x_1, y_1 \in E_1 \quad d_2(f(x_1), f(y_1)) = d_1(x_1, y_1)$

Alors f est injective.
(ex : d_2 distance transportée de d_1 par f)

• Soit (E, d) un espace métrique, $a \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$

Boule ouverte de centre a et de rayon r $= B(a, r) = \{x \in E ; d(x, a) < r\}$

" fermée " " $= B'(a, r) = \{x \in E ; d(x, a) \leq r\}$

Sphère " " $= S(a, r) = \{x \in E \,/\, d(x, a) = r\}$

Evidemment $B'(a, r) = B(a, r) \sqcup S(a, r)$
réunion d'ensembles disjoints

• $A, B \subset E$

distance de A à B $\overset{def}{=} d(A, B) = \inf\limits_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x, y)$

Si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $d(A, B) = 0$. La réciproque est fausse.

• diamètre de $A \subset (E, d)$

$$\delta(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y)$$

$A \subset B \Rightarrow \delta(A) \leq \delta(B)$
($A \subset B$ $\delta(A) = \delta(B) \not\Rightarrow A = B$ en général)

• A sous-ensemble borné de E $\Leftrightarrow \delta(A) < +\infty$

$\Updownarrow$

$A \subset$ Boule de E

$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$ si $d(A, B) = 0$

Si $z \in A \cap B$

$x, y \in A \cup B$ $\quad x, y \in A$ $\quad d(x, y) \leq \delta(A) \leq \delta(A) + \delta(B)$

$x \in A \;\; y \in B$ $\quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq \delta(A) + \delta(B)$

$x, y \in B$ $\quad d(x, y) \leq \delta(B) \leq \delta(A) + \delta(B)$



Sinon :

$\forall a \in A \quad \forall b \in B \qquad \delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(a,b)$

Passage à la limite : $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$

Suites dans un espace métrique (E,d). Suites de Cauchy - Espace complet. Théorie du point fixe.

1°/ Suites

* Suite dans $(E, ~~d~~$ qq$)$ $\quad \mathbb{N} \longrightarrow E$

$x \longmapsto x_n \qquad$ notée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

* sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad \mathbb{N} \longrightarrow E$

$k \longmapsto x_{n_k} \qquad$ notée $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$

où $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$k \longmapsto n_k$ strictement croissante.

* Pour que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente vers $x \in (E,d)$ il faut et il suffit que :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq N \quad d(x, x_n) < \varepsilon$ où $x_n \in B(x, \varepsilon)$

On note $x = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

Conséquences immédiates : a) unicité de la limite.

b) $x = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

alors $x = \lim\limits_{k \to +\infty} x_{n_k}$ pour tte sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$

* x valeur d'adhérence pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ssi $\exists\ (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x = \lim_{k\to+\infty} x_{n_k}$

Remarquer, cependant que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une unique valeur d'adhérence $x \not\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x

2°/ Suites de Cauchy - Espaces complets

* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy $\Leftrightarrow$ ~~$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}^*$~~

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N}^* \quad \forall n\geq m>N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Suite convergente $\Rightarrow$ Suite de Cauchy (cf. inégalité triangulaire).
Une suite de Cauchy qui a une valeur d'adhérence x converge en x.

* (E,d) est complet $\Leftrightarrow$ Toute suite de Cauchy d'éléments de E converge vers un élément de E
$(E, \|\ \|)$ est un espace de Banach s'il est un espace métrique complet (pour la métrique sous-jacente)

Ex : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ pour les normes $\|\ \|_1$; $\|\ \|_2$; $\|\ \|_\infty$ - De façon plus générale, si d_1 et d_2 sont deux distances équivalentes (c.à.d $\exists K_1, K_2>0 \quad K_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq K_2 d_1(x,y)$) alors les espaces métriques (E,d_1) et (E,d_2) ont même suite de Cauchy.
Ainsi (E,d_1) complet $\Leftrightarrow$ (E,d_2) complet

Ex : ℓ^∞ et ℓ^p de Banach (pour $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|_p$ resp)
De m̂ pour $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}(A)$. En effet :

$(f_n)_n$ suite de Cauchy de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}(A)$

$$\Updownarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \; / \quad m \geqslant n > N \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ (1)

$$\sup_{t \in A} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$$

Donc, $\forall t \in A \quad (f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{C}$, donc converge vers $f(t)$ (car $\mathbb{C}$ est complet)

(1) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \; / \; m \geqslant n > N \quad \forall t \in A \quad |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$

Passage à la limite, pour $m \to +\infty$ (t fixé)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \; / \; n \geqslant N \quad \forall t \in A \quad |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon$$

c.à.d que f est bornée et $f = \lim_{n \to +\infty} f_n$ pour la norme $\| \; \|_\infty$

Z

* $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$ pour $\| \; \|_\infty$ est un Banach

En effet :

$$\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{C}}(I)$$

(sous-espace muni de la m̂ norme $\| \; \|_\infty$)

$(f_n)_n$ suite de Cauchy de $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$

$(f_n)_n$ " " de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}(I) \Rightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour $\| \; \|_\infty$ vers $f \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}(I)$.

Je veux montrer que f est continue (c.à.d $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$).

t fixé dans I :

$$|f(t+h) - f(t)| \leqslant \underbrace{|f(t+h) - f_n(t+h)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + |f_n(t+h) - f_n(t)| + \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}}$$

$< \frac{\varepsilon}{3}$: on prend $n > N$

(cf. convergence $f \to f_n$ pour $\| \; \|_\infty$)

Or $|f_n(t+h) - f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ dès que $|h| < \delta$

eu égard à la continuité de f_n.

Prop | $(E, \| \|)$ espace de Banach
$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de E telle que $\sum_n \|x_n\| < +\infty$
(série normalement convergente)
Alors la série $\sum_{n \geq 0} x_n$ est convergente dans E et, de plus $\left\| \sum_n x_n \right\| \leq \sum \|x_n\|$

Remarque: Si, dans $(E, \| \|)$ normé, toute série normalement convergente est convergente alors E est un Banach.

Démonstration:

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} x_n \quad \text{est convergente}$$

$(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ = suite dans E.
A montrer : $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suite de Cauchy.

$$\|s_{k+p} - s_k\| = \left\| \sum_{k+1}^{k+p} x_n \right\| \leq \sum_{k+1}^{k+p} \|x_n\| < \varepsilon \text{ dès que } k \text{ suffisamment grand}$$

(pour k assez grand et p quelconque) (car $\sum_{k+1}^{k+p} \|x_n\|$ conv.)

3°) Théorème du point fixe.

Th | (E, d) métrique et complet
$f : E \longrightarrow E$
$(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $k_n \in \mathbb{R}_+$ $\sum_{n=1}^{+\infty} k_n < +\infty$
Et, de plus :
$\forall n \geq 1 \quad d(f^n(x), f^n(y)) \leq k_n \, d(x, y) \quad x, y \in E$

Alors $\exists! \, x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = x_0$ (point fixe de f)
Et, de plus : $\forall x \in E \quad x_0 = \lim_{n \to +\infty} f^n(x)$

Démonstration :

Unicité : $f(x_0) = x_0 = f^n(x_0)$

$f(y_0) = y_0 = f^n(y_0)$

Donc $\underbrace{d(f^n(x_0), f^n(y_0))}_{d(x_0, y_0)} \leq \underbrace{k_n}_{\to 0 \text{ car } \sum_1^{+\infty} k_n < +\infty} d(x_0, y_0)$

On a bien $d(x_0, y_0) = 0$

Existence : $x \in E$ et $x_n = f^n(x)$ pour $n \geq 1$

Comme je suis ds un espace complet, tout reste à montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \underbrace{d(x_{n+p}, x_{n+p-1})}_{\leq k_{n+p-1} d(x_1, x)} + \dots + \underbrace{d(x_{n+1}, x_n)}_{\underbrace{d(f^n(x_1), f^n(x))}_{\leq k_n d(x_1, x)}}$$

Donc :

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_1, x) \underbrace{\sum_{j=n}^{n-p-1} k_j}_{\to 0 \text{ quand } n \to +\infty}$$

Donc $x_0 = \lim_{+\infty} x_n$ existe.

Montrons que $f(x_0) = x_0$.

Regardons $d(f(x_0), x_n) \leq k_1 \underbrace{d(x_0, x_{n-1})}_{\to 0 \text{ quand } n \to +\infty}$

(pour $n > 1$)

oui

Application :

E métrique ; $f : E \to E$ lipschitzienne de constante $K \geq 0$

ssi $\quad d(f(x), f(y)) \leq K\, d(x,y) \quad x, y \in E$

(K étant la plus petite constante qui convient)

Si $K < 1$, l'application est appelée "application contractante".
Alors une application contractante satisfait le "théorème du point fixe".

Espaces topologiques - Définitions générales.

1°/ Topologie - Ouverts - Voisinages - Fermés.

Soit E un ensemble. Se donner une topologie sur E, c'est se donner une famille $\mathcal{O}$ de parties de E (dont les éléments seront appelés les ouverts de E) telles que :

a) $\emptyset \in \mathcal{O} \quad E \in \mathcal{O}$

b) Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

c) Toute réunion d'ouvert est un ouvert.

Soit $a \in E$. Voisinage de a : toute partie de E contenant un ouvert contenant a.

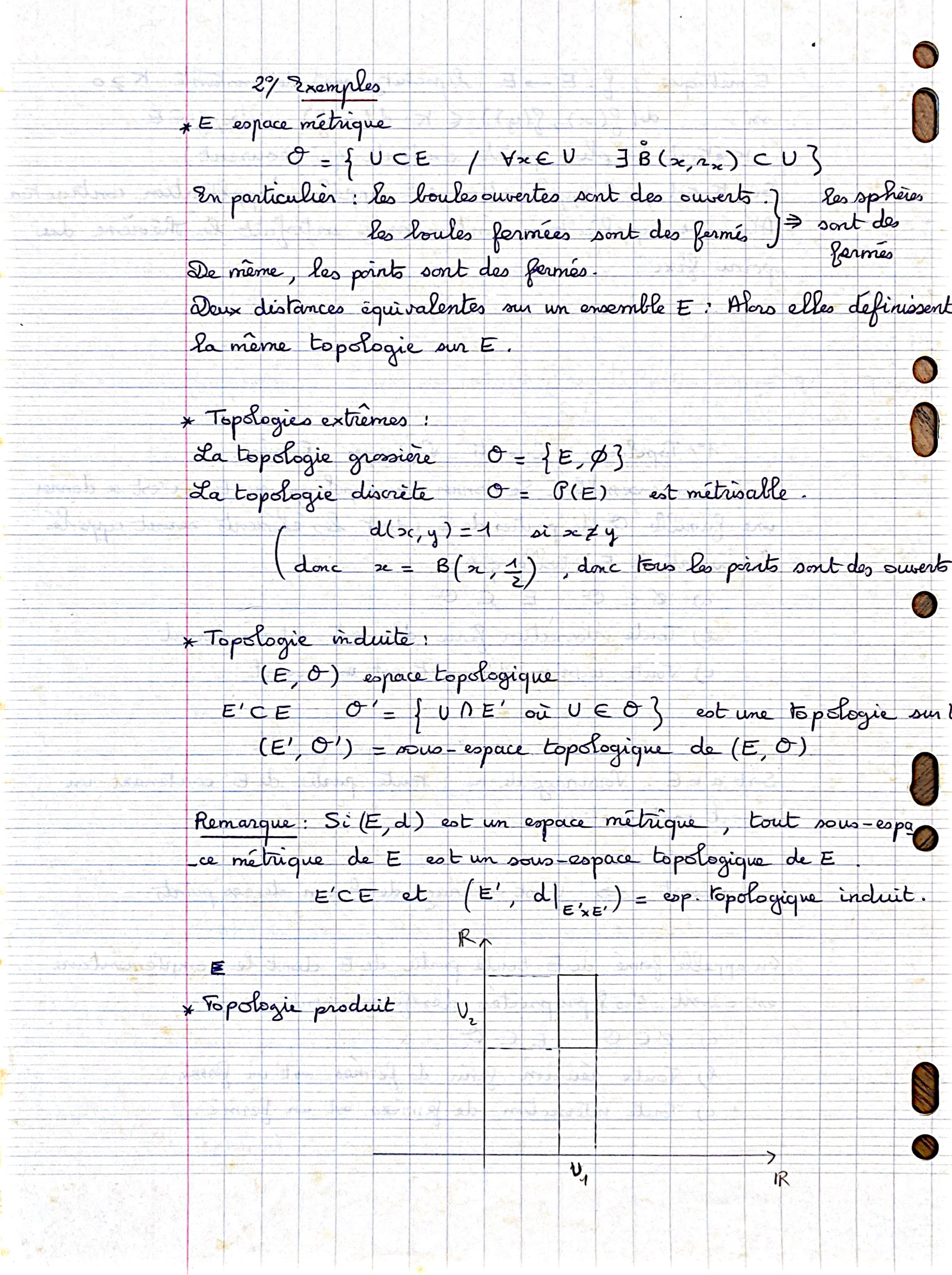
? U ouvert $\Leftrightarrow$ U est voisinage de chacun de ses points

On appelle fermé de E toute partie de E dont le complémentaire est ouvert. Les 3 propriétés des fermés sont :

a) $\emptyset \in \mathcal{O} \quad E \in \mathcal{O}$

b) Toute réunion finie de fermés est un fermé.

c) Toute intersection de fermées est un fermé.



2°/ Exemples

* E espace métrique

$$\mathcal{O} = \{ U \subset E \ / \ \forall x \in U \quad \exists \mathring{B}(x, r_x) \subset U \}$$

En particulier : les boules ouvertes sont des ouverts.
les boules fermées sont des fermés } ⇒ les sphères sont des fermés

De même, les points sont des fermés.

Deux distances équivalentes sur un ensemble E : Alors elles définissent la même topologie sur E.

* Topologies extrêmes :

La topologie grossière $\mathcal{O} = \{E, \emptyset\}$

La topologie discrète $\mathcal{O} = \mathcal{P}(E)$ est métrisable.

$d(x,y) = 1$ si $x \neq y$
donc $x = B(x, \frac{1}{2})$, donc tous les points sont des ouverts

* Topologie induite :

$(E, \mathcal{O})$ espace topologique

$E' \subset E$ $\quad \mathcal{O}' = \{ U \cap E' \text{ où } U \in \mathcal{O} \}$ est une topologie sur E'

$(E', \mathcal{O}')$ = sous-espace topologique de $(E, \mathcal{O})$

<u>Remarque</u> : Si (E,d) est un espace métrique, tout sous-espace métrique de E est un sous-espace topologique de E.

$E' \subset E$ et $(E', d|_{E' \times E'})$ = esp. topologique induit.

E

* Topologie produit

$\{ U \in E_1 \times E_2 \quad \forall (x_1, x_2) \in U \quad \exists U_1 \in \mathcal{O}_1 \quad \exists U_2 \in \mathcal{O}_2$
$(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subset U \}$

Vérifier qu'il s'agit bien d'une topologie

Remarque : Si (E_1, δ_1), (E_2, δ_2) sont des espaces métriques les trois distances équivalentes que l'on avait considéré définissent bien la topologie produit.

3°/ Intérieur, adhérence, frontière d'une partie $A \subset (E, \mathcal{O})$ e.t

$x \in E$ $\quad x$ = point intérieur de $A \Leftrightarrow A$ est voisinage de x $\quad (\Rightarrow x \in A)$

On pose $\mathring{A} = \{x \in A$, x point intérieur à $A\} \subset A$
(intérieur de A)

$\mathring{A}$ est un ouvert : en effet $\quad \mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O} \\ U \subset A}} U$

$\mathring{A}$ = plus grand ouvert inclus dans A.
Alors $A = \mathring{A} \Leftrightarrow A$ est ouvert.

Propriétés évidentes :

$A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$

$\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$ et l'on a même $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

$\mathring{A} \cup \mathring{B} \underset{\neq}{\subset} \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$ (pas d'égalité).

En effet :

$\mathring{A} \cap B \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$ oui.

contre-exemple : $E = \mathbb{R}$ $\quad A = \mathbb{Q}$ $\quad \mathring{A} = \emptyset$ $\quad \mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$
$B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ $\quad \mathring{B} = \emptyset$

$x \in E$ $\quad x$ = point adhérent à $A \Leftrightarrow$ Tout voisinage de x coupe A

On pose $\bar{A} = \{x \in E \,/\, x$ = point adhérent à $A\}$

On a $\complement_E \bar{A} = \left(\complement_E A\right)^\circ$ (on l'appelle extérieur de A)

En effet :

$x \in \complement_E \bar{A} \Leftrightarrow$ ∃ voisinage de x qui ne coupe pas A

∃ voisinage de x inclus dans $\complement A$

$$\Updownarrow$$

$$x \in \overset{\circ}{\overline{\complement A}}$$

$\bar{A}$ est donc fermé.

Et :

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ F \supset A}} F$$

en utilisant $\complement \bar{A} = \left(\complement A\right)^\circ$

et $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \text{ ouvert} \\ U \subset A}} U$

Propriétés immédiates

$A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

$\overline{A \cap B} \underset{\neq}{\subset} \bar{A} \cap \bar{B}$ (même contre-exemple)

$\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$

E métrique / métrisable :

$\bar{A} = \{x \in E \ / \ d(x, A) = 0\}$

$\bar{A} = \{x \in E \ / \ \exists (x_n)_n \ \ x_n \in A \quad x = \lim_{n \to +\infty} x_n\}$

$x \in E$ x point d'accumulation de A $\Leftrightarrow$ Tout voisinage de x rencontre A en un point $\neq x$.

x point isolé de A, $x \in A$ $\Leftrightarrow$ ∃ voisinage de x qui coupe A en x uniquement.

$\bar{A} = \{$points d'accumulation$\} \sqcup \{$pts isolés de A$\}$

ex : $E = \mathbb{R}$ $\quad A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$

$\bar{A} = \underbrace{\{0\}}_{\text{point d'accum.}} \sqcup \underbrace{A}_{\text{points isolés}}$

$x \in E$ $\quad x$ point frontière de $A \Leftrightarrow$ Tout voisinage de x coupe A et $\complement_E A$

On pose $Fr(A) = \{x \in E \mid x \text{ point frontière}\} = \bar{A} \cap \overline{\complement_E A}$ fermé

$\bar{A} = \mathring{A} \cup Fr(A) \Leftrightarrow Fr\,A = \bar{A} - \mathring{A} = \bar{A} \cap \underbrace{\complement \mathring{A}}_{\overline{\complement_E A}}$

En conclusion : $E = \mathring{A} \cup Fr(A) \cup \underbrace{\overset{\circ}{\complement A}}_{\text{extérieur de } A}$ (réunion disjointe)

Ensembles denses - Espaces séparables - Théorème de Baire

1°/ Ensembles denses. Espaces séparables.

E espace topologique

$A \subset B \subset E$

A dense dans $B \Leftrightarrow$ adhérence de A dans B est égal à B

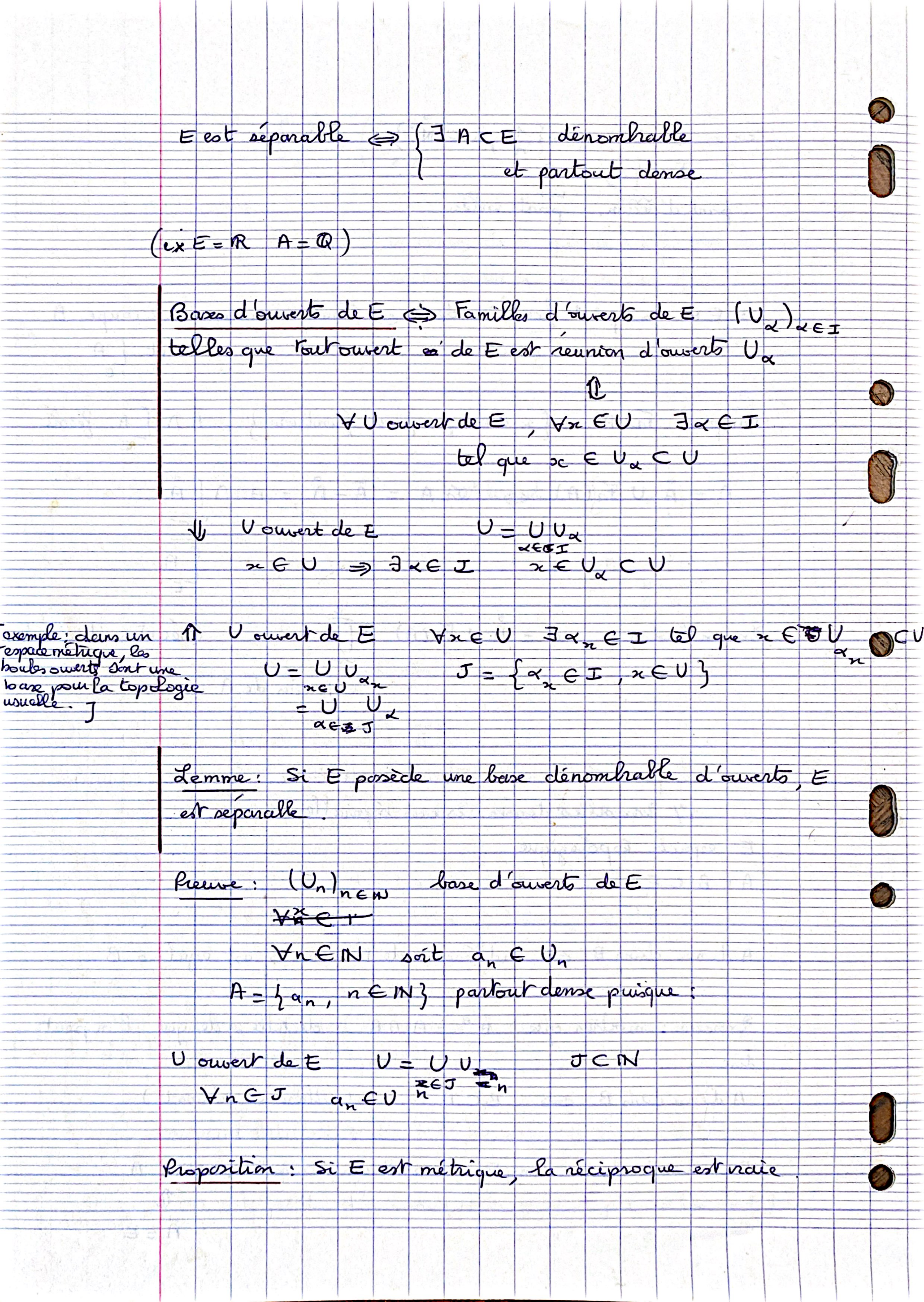
Exercice : montrer que $\bar{A}^B = \bar{A} \cap B$ de telle sorte que l'on peut dire :

A dense dans $B \Leftrightarrow B \subset \bar{A}$ (adhérence dans E)

A partout dense dans $E \Leftrightarrow A$ dense dans $E \Leftrightarrow E \subset \bar{A}$

$\Updownarrow$

$\bar{A} = E$



E est séparable $\Leftrightarrow \begin{cases} \exists A \subset E & \text{dénombrable} \\ & \text{et partout dense} \end{cases}$

(ex $E = \mathbb{R}$ $A = \mathbb{Q}$)

<u>Bases d'ouverts de E</u> $\Leftrightarrow$ Familles d'ouverts de E $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ telles que tout ouvert de E est réunion d'ouverts U_α

$\Updownarrow$

$\forall U$ ouvert de E, $\forall x \in U$ $\exists \alpha \in I$ tel que $x \in U_\alpha \subset U$

$\Downarrow$ U ouvert de E $\quad U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

$x \in U \Rightarrow \exists \alpha \in I \quad x \in U_\alpha \subset U$

$\Uparrow$ U ouvert de E $\quad \forall x \in U \quad \exists \alpha_x \in I$ tel que $x \in U_{\alpha_x} \subset U$

$U = \bigcup_{x \in U} U_{\alpha_x} = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \qquad J = \{\alpha_x \in I, x \in U\}$

[exemple : dans un espace métrique, les boules ouverts sont une base pour la topologie usuelle.]

<u>Lemme</u> : Si E possède une base dénombrable d'ouverts, E est séparable.

<u>Preuve</u> : $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base d'ouverts de E

~~$\forall x \in$~~

$\forall n \in \mathbb{N}$ soit $a_n \in U_n$

$A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ partout dense puisque :

U ouvert de E $\quad U = \bigcup_{n \in J} U_n \quad J \subset \mathbb{N}$

$\forall n \in J \quad a_n \in U$

<u>Proposition</u> : Si E est métrique, la réciproque est vraie.

Preuve : $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ est partout dense. Soit $B(a_n, \frac{1}{m})$ la famille dénombrable d'ouverts. Montrons que c'est une base d'ouverts de E.
Soit U un ouvert de E.

$$\forall x \in U \quad \exists r \in \mathbb{R} \,/\, x \in B(x, r) \subset U$$

Soit $m \in \mathbb{N}$ vérifiant $\frac{1}{m} \leq \frac{r}{2}$

Comme A est partout dense :

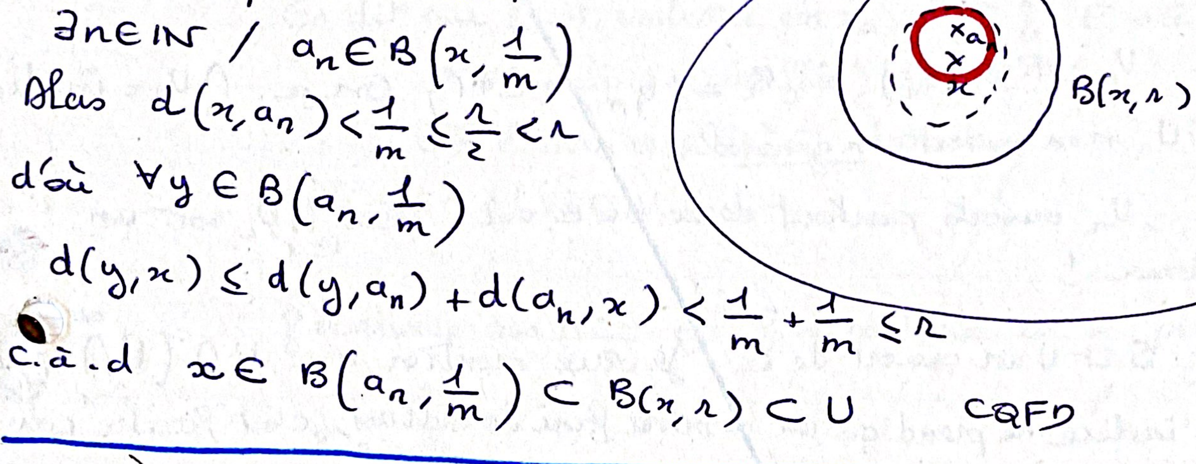
$\exists n \in \mathbb{N} \,/\, a_n \in B(x, \frac{1}{m})$

Alors $d(x, a_n) < \frac{1}{m} \leq \frac{r}{2} < r$

d'où $\forall y \in B(a_n, \frac{1}{m})$

$d(y, x) \leq d(y, a_n) + d(a_n, x) < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \leq r$

c.à.d $x \in B(a_n, \frac{1}{m}) \subset B(x, r) \subset U$ CQFD



2°/ Théorème de Baire (E = Banach i.e. espace métrique complet)

Th 1 (Cantor) Soit $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés non vides de E telle que $\lim_{n \to +\infty} \delta(F_n) = 0$. Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ contient un point et un seul.

Preuve : • unicité

$x, y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \Rightarrow x, y \in F_n \;\forall n \Rightarrow d(x, y) \leq \underbrace{\delta(F_n)}_{\to 0} \;\forall n \Rightarrow d(x, y) = 0$
$\Rightarrow x = y$ oui

• existence

Soit $x_n \in F_n$. (x_n) est une suite de Cauchy :

$$d(x_n, x_m) \leq \underbrace{\delta(F_n)}_{\to 0 \, (n \to +\infty)} \quad \text{pour } m \geq n \quad (\text{car } F_m \subset F_n)$$

Comme E est complet, $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$

Alors $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ puisque, pour n fixé, $m \geq n \Rightarrow F_m \subset F_n$ d'où $x_m \in F_n$.
Ainsi, à partir du rang n, tous les x_m sont dans F_n. (x_m) est une suite de F_n qui est un fermé. Donc $x = \lim_{\substack{m \to +\infty \\ m \geq n}} x_n$ qui existe, appartient à $\overline{F_n} = F_n$ (car E métrique et F_n fermés).

CQFD

Continuité ; uniforme continuité ; homéomorphismes.

1°/ Continuité

Définition : Soient E et E' deux espaces topologiques et $x_0 \in E$.
On dit que f est continue en x_0 (où $f : E \to E'$) si

$\forall V'$ voisinage de $f(x_0)$ dans E'

$\exists$ ~~$\forall$~~ V voisinage de x_0 dans E

tels que $f(V) \subset V'$.

f continue sur $A \subset E \Leftrightarrow f$ est continue en x pour tout $x \in A$.

Exemples :

1) Prenons f localement constante. C.à.d que

$\forall x \in E \quad \exists$ voisinage V de x dans E / $f(V) = \{f(x)\}$

f est continue sur E.

2) Soit $F \subset E$ un s.e.t. de E et $i : F \to E$ défini par $i(x) = x$. Alors ~~f~~ i est continue de F set vers E et.
En effet : $\forall V'$ voisinage de x_0 dans E

$\exists V = V' \cap F$ voisinage de x_0 dans F

tel que $i(V) = V' \cap F \subset V'$

(cela provient de la définition d'un set)

3) E_1, E_2 deux e.t. $\qquad E_1 \times E_2 \xrightarrow{\mu_1} E_1$, $E_1 \times E_2 \xrightarrow{\mu_2} E_2$

μ_1 et μ_2 sont continues.

$\forall V_1$ vois. de $\mu_1(x_1, x_2) = x_1$ dans E_1

$\exists V = V_1 \times E_2$ vois. de (x_1, x_2) dans $E_1 \times E_2$ tel que $\mu(V) \subset V_1$.

4)

Pro | (E, d) et (E', d') sont 2 espaces métriques. Alors $f : E \to E'$

est continue en $x_0 \in E$ ssi
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

NB : proposition analogue si $(E_1, \| \|_1)$ et $(E_2, \| \|_2)$.

preuve : elle est facile compte tenu de la structure topologique d'un espace métrique.
$f : (E, d) \to (E', d')$ continue $\Rightarrow \forall B'(f(x_0), \varepsilon)$
$\exists V$ ouvert contenant x_0 tel que $f(V) \subset B'(f(x_0), \varepsilon)$
donc $\exists \delta > 0$ / $x_0 \in B(x_0, \delta) \subset V$ et $f(V) \subset B'(f(x_0), \varepsilon)$
En d'autres termes :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad (P)$$

Inversement, si (P) a lieu, soit V' un voisinage ouvert de $f(x_0)$, alors $\exists \varepsilon$ / $f(x_0) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \subset V'$
et $\exists V = B(x_0, \delta)$ tel que $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$
d'où $f(V) \subset V'$. Ce qui prouve bien que f est continue

Critères de continuité.

Th (rappel) Soit $f : E_1 \to E_2$ linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) f est continue en 0.
b) f est continue.
c) $\exists K > 0 \quad \forall x \in E \quad \|f(x)\|_2 \leq K \|x\|_1$

Th Soit $f : E \to E'$ où E et E' sont 2 e. topologiques. Sont $\Leftrightarrow$:

a) f continue
b) $\forall A \subset E \quad f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$
c) $\forall F'$ fermé de E' $\quad f^{-1}(F') =$ fermé de E
d) $\forall U'$ ouvert de E' $\quad f^{-1}(U') =$ ouvert de E

Th (rappel)

Soit $f : E_1 \to E_2$ linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) f continue en 0

b) f continue.

c) $\exists K > 0 \quad \forall x \in E \qquad \|f(x)\|_2 \leq K \|x\|_1$

Pro

Soient $f : E \to E'$ et E, E' deux espaces topologiques. Sont équivalentes :

a) f continue

b) $\forall A \subset E \qquad f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

c) $\forall F'$ fermé de E' $\qquad f^{-1}(F') =$ fermé de E

d) $\forall U'$ ouvert de E' $\qquad f^{-1}(U') =$ ouvert de E

Preuve :

a) $\Rightarrow$ b) Supposons que f soit continue. Soit $x_0 \in \bar{A}$. Désignons par $\mathcal{V}$ un voisinage de $f(x_0)$. Il existe $\mathcal{U}$ voisinage de x_0 tel que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$.

Comme $x_0 \in \bar{A}$: $\qquad \mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$

Donc $\qquad \emptyset \neq f(\mathcal{U} \cap A) \subset f(\mathcal{U}) \cap f(A) \subset \mathcal{V} \cap f(A)$

Et, par conséquent $\mathcal{V} \cap f(A) \neq \emptyset$, ce qui prouve bien que $f(x_0) \in \overline{f(A)}$.

b) $\Rightarrow$ c) On prend $A = f^{-1}(F')$

$$f(\overline{f^{-1}(F')}) \subset \overline{f(f^{-1}(F'))} = \overline{F'} = F'$$

Donc $\qquad \overline{f^{-1}(F')} \subset f^{-1}(F') \Leftrightarrow \overline{f^{-1}(F')} = f^{-1}(F')$

CQFD

c) $\Rightarrow$ d)

Soit $U' \subset E'$ ouvert.

$F' = \complement U'$ fermé $\Rightarrow f^{-1}(\complement U') = \complement f^{-1}(U')$ fermé $\Rightarrow f^{-1}(U')$ ouvert

4) $\Rightarrow$ 1) distrayant.

Pro

$$E \xrightarrow{f} E' \xrightarrow{g} E''$$

Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.

Pro

$$f : E \longrightarrow F_1 \times F_2$$
$$x \longmapsto (f_1(x), f_2(x))$$

Alors :

f continue en x_0 $\Leftrightarrow$ f_1 et f_2 continues en x_0

Preuve :

($\Rightarrow$) $f_1 = pr_1 \circ f$

$f_2 = pr_2 \circ f$ et pr_i = application continue.

($\Leftarrow$) Soit V un voisinage quelconque de $(f_1(x), f_2(x))$. Alors V contient un ouvert élémentaire de la forme $A_1 \times A_2$ et contenant $(f_1(x), f_2(x))$.

A_1 = ouvert de F_1 et A_2 = ouvert de F_2.

Or $f^{-1}(A_1 \times A_2) = \underbrace{f_1^{-1}(A_1)}_{\text{ouvert}} \cap \underbrace{f_2^{-1}(A_2)}_{\text{ouvert}}$

donc $f^{-1}(A_1 \times A_2)$ est un ouvert de E contenant x.

Il suffit de voir qu'alors $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(A_1 \times A_2)$ montre bien que $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x dans E.

3°/ Uniforme continuité (espaces métriques)

Def | (E,d) (E',d') sont des espaces métriques.
$f : E \to E'$ est dite uniformément continue si :
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \quad d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Ex : application constante, application lipschitzienne.

Propriétés immédiates :

* continuité uniforme $\Rightarrow$ continuité.
* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto x^2$

est continue, mais non unif. continue (faire $|x^2-y^2| = |x-y||x+y|$)

* pro 2 et pro 3
* $(x_n)_n$ = suite de Cauchy de E

f uniformément continue $\Rightarrow (f(x_n))_n$ suite de Cauchy de E'.

4°/ Homéomorphismes

Def | $f : E \to F$ est un homéomorphisme si
1) f est bijective
2) f et f^{-1} sont continues

Ainsi, pour que f ~~soit~~, bijective et continue, soit un homéomorphisme, il faut et il suffit qu'elle soit ouverte (resp. fermée).

Énonçons, sans démonstration, le théorème de "l'inverse continu" (ou "théorème de Banach") :

Th | Si E et F sont des esp. de Banach, toute application linéaire continue bijective est un homéomorphisme.

Rappelons qu'un isomorphisme d'espaces vectoriels est un homéomorphisme linéaire. Le théorème de Banach précise donc que f^{-1} est continue.

5°/ Comparaison de topologies.

Def Soit un ensemble E dans lequel on définit deux topologies $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$. On dira que $\mathcal{O}_1$ est une topologie plus fine que $\mathcal{O}_2$ si $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$

c.à.d si tout ouvert pour $\mathcal{O}_2$ est aussi un ouvert pour $\mathcal{O}_1$.

Propriété : pour que $\mathcal{O}_1$ soit plus fine que $\mathcal{O}_2$, il faut et il suffit que $Id : (E, \mathcal{O}_1) \longrightarrow (E, \mathcal{O}_2)$ soit continue.

Si Id = homéomorphisme de $(E, \mathcal{O}_1)$ sur $(E, \mathcal{O}_2)$, les deux topologies seront équivalentes (égales !)

$d_1 \sim d_2 \Leftrightarrow \exists k_1, k_2 > 0 \quad k_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq k_2 d_1(x,y)$

$\Downarrow$ (1)

$Id : (E, d_1) \longrightarrow (E, d_2)$ bi-uniformément continue $\Leftrightarrow$ d_1 et d_2 uniformément équivalentes

$\Updownarrow$

Id = homéomorphisme $\Leftrightarrow$ (x_n) suite de Cauchy pour d_1 $\Updownarrow$ (x_n) suite de Cauchy pour d_2

$\Updownarrow$

d_1 et d_2 définissent la même topologie

je mettrais : $d_1 \sim d_2$ $\Updownarrow$ d_1 et d_2 définissent la m̂ topologie sur E.

Rem : si $(E, \| \|_1)$, $(E, \| \|_2)$ tout est équivalent. (cf (1))

Espaces séparés . Limites . Valeurs d'adhérence.

1°/ Espaces séparés

Def | E est dit séparé si deux points distincts quelconques de E possèdent des voisinages respectifs disjoints (Axiome de séparation d'Hausdorff)

Les espaces métriques sont séparés. Une topologie plus fine qu'une topologie séparée est séparée. La topologie discrète est séparée.

Exemple de topologie non séparée : Sur $[0, +\infty[$, envisager la topologie de base $[0, \alpha[$ $\alpha \in \mathbb{R}_+$

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Tout voisinage de a contient 0.

Propriétés

1) Toute partie finie d'un espace séparé est fermée.

2) Tout sous-espace topologique d'un espace séparé est séparé.

3) Si E_1 et E_2 désignent deux E.T. non vides :

$$E_1 \times E_2 \text{ séparés} \Leftrightarrow E_1 \text{ et } E_2 \text{ séparés.}$$

3)

$$E \text{ séparé} \Leftrightarrow \Delta = \{(x,x) \in E \times E \ , x \in E\} \text{ fermé de } E \times E$$

En effet :

$\forall x, y \in E$ $\quad x \neq y \quad \exists V_x\ V_y$ ouverts de E $\quad V_x \cap V_y = \emptyset$

$\Updownarrow$

$\forall x, y \notin \Delta \quad \exists V_x, V_y \quad \underbrace{V_x \times V_y}_{\text{voisinage ouvert de } (x,y)} \cap \Delta = \emptyset$

$\Updownarrow$

Δ fermé

4) Soient f et g de $E \longrightarrow S$ et continues.
(et) (et séparé)

Alors $F = \{x \in E \,/\, f(x) = g(x)\}$ = fermé de E

~~En effet~~ ($\Rightarrow f(x) = g(x)$ $\forall x \in A$ avec $\bar{A} = E$, alors $f = g$)
f et g continues

Preuve :

$$\varphi : E \longrightarrow S \times S$$
$$x \longmapsto (f(x), g(x))$$

$\varphi^{-1}(\Delta) = F$ fermé car $\varphi = (f, g)$ est continue.

5) Graphe fermé

$f : E \longrightarrow S$ E = e.t. S = e.t. séparé.

f continue $\Rightarrow$ graphe de $f = G = \{(x, f(x)) \in E \times S \,;\, x \in E\}$ est un fermé de $E \times S$

Preuve :

$$E \times S \longrightarrow S$$
$$(x, y) \xrightarrow{\varphi} y \quad \text{continue}$$
$$(x, y) \xrightarrow{\psi} f(x) \quad \text{continue}$$

donc $G = \{(x,y) \in E \times S \quad y = f(x)\}$ fermé de $E \times S$

⚠ La réciproque est fausse !

6) Théorème du graphe fermé.

Th | $f : E \rightarrow E'$ linéaire (E, E' de Banach)
Si le graphe de f est fermé dans $E \times E'$, alors f est continue.

Preuve :

$G \subset \underbrace{E \times E'}_{\text{Banach}}$ $\qquad (x, f(x)) \xrightarrow{\varphi} x$ $\qquad$ φ bijective, linéaire continue.

$$G \longrightarrow E$$

Le théorème de Banach nous dit que $\begin{cases} E \to G \\ x \mapsto (x, f(x)) \end{cases}$ est continue.

d'où $E \to E' : x \mapsto f(x)$ est continue. CQFD

2°/ Limites _ Valeurs d'adhérence : a) Définitions générales

E, E' e.t $A \subset E$ $f : A \to E'$

On dit que $f(x)$ tend vers a' lorsque x tend vers $a \in \bar{A}$ et l'on note :

$$a' = \lim_{\substack{x \to a \\ a \in \bar{A}}} f(x) \text{ ssi :}$$

en notant $\bar{f} : A \cup \{a\} \to E$

$$\begin{cases} x \mapsto f(x) & \text{pour } x \in A \setminus \{a\} \\ a \mapsto a' & \text{pour } a \end{cases}$$

$\bar{f}$ est continue en a.

Définition équivalente :

$\begin{cases} \forall \text{ voisinage } \mathcal{V} \text{ de } a' \\ \exists \text{ voisinage } \mathcal{U} \text{ de } a \end{cases}$ tel que $f(\mathcal{U} \cap A) \subset \mathcal{V}$

Remarque : Si E' est séparé, la limite est unique. (le montrer)

Def : On dit que a' est valeur d'adhérence de $f(x)$ lorsque $x \to a$ si :

$\begin{cases} \forall \text{ voisinage } \mathcal{V}' \text{ de } a' \text{ dans } E' \\ \forall \text{ voisinage } \mathcal{V} \text{ de } a \text{ dans } E \end{cases}$

$\exists x \in \mathcal{V} \cap A$ tel que $f(x) \in \mathcal{V}'$

Remarquons que les valeurs d'adhérences ne sont pas unique en général.

Par exemple, prenons :

$$E = \mathbb{R} \supset A =]0, +\infty[\xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sin \frac{1}{x}$$

En effet $0 \in \bar{A}$. Alors tout $a' \in [-1,1]$ est valeur d'adhérence de $\sin \frac{1}{x}$ lorsque $x \to 0$.

Lemme

L'ensemble des valeurs d'adhérence de $f(x)$ quand $x \to a$ est égal à $\bigcap_{V \text{ voisinage de } a} \overline{f(V \cap A)}$

Preuve :

$a' \in \bigcap_{V \text{ vois. de } a} \overline{f(V \cap A)} \iff \forall V \text{ vois. de } a : \quad a' \in \overline{f(V \cap A)}$

c.à.d :

$\forall V' \text{ vois. de } a' \quad V' \cap f(V \cap A) \neq \emptyset$

$\iff \exists x \in V \cap A \ / \ f(x) \in V'$ oui

b) Application pour les suites dans un espace topologique E

On prend $E = \bar{\mathbb{N}}$; $A = \mathbb{N}$; $E' = E$

$a = +\infty \qquad a' = x \in E \qquad f : \mathbb{N} \longrightarrow E$
$\qquad\qquad n \longmapsto x_n$

On transpose ensuite facilement les définitions générales données au a) en termes de suite :

Def | On dit que $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$ si :
$\forall$ voisinage V de $x \quad \exists N > 0 \quad n > N \Rightarrow x_n \in V$

Quel que soit le voisinage V de x, les x_n appartiendront tous à ce voisinage à partir d'un certain rang.

Def | x = valeur d'adhérence de la suite (x_n) si :
$\forall V$ voisinage de x dans E $\quad \forall N > 0 \quad \exists n > N$ tel que $x_n \in V$

Ainsi x est point adhérent à la suite (~~ou encore "point d'accumulation de la suite"~~) si, pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de ~~a~~ x il existe une infinité de valeurs de l'entier n telles que $x_n \in \mathcal{V}$.

<u>lemme</u> : l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) (sous-entendu : quand $n \to +\infty$) sera égal à $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \{x_n \,/\, n > N\}$

Th | Nous avons l'implication :

$$\exists \text{ sous-suite } (x_{n_k})_k \text{ convergeant vers } x$$
$$\Downarrow$$
$$x \text{ est valeur d'adhérence de la suite } (x_n)$$

La réciproque est vraie si E est métrique.

Preuve :

(a) Supposons l'existence de $(x_{n_k})_k$ telle que :

$$\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = x$$

Alors, quel que soit le voisinage $\mathcal{V}$ de x :

$$\exists K > 0 \quad k > K \Rightarrow x_{n_k} \in \mathcal{V}$$

Comme $k \mapsto x_{n_k}$ est croissante

$$\exists\, k > K \Rightarrow \{\exists N \quad n_k > N \Rightarrow x_{n_k} \in \mathcal{V}\}$$

donc x est valeur d'adhérence de $(x_n)_n$

(b) Inversement, supposons que x est valeur d'adhérence de (x_n).
On supposera, dans la démonstration, que E est métrique (ou, plus généralement, que tout point de E admet un système fondamental de voisinages).
On définit la sous-suite récurrente sur k :

$V_1 = B(x, 1)$ $N = 1$ $\exists\, n_1 > 1$ tel que $x_{n_1} \in B(x, 1)$

$V_2 = B(x, \frac{1}{2})$ $N = n_1$ $\exists\, n_2 > n_1$ tel que $x_{n_2} \in B(x, \frac{1}{2})$

$V_k = B(x, \frac{1}{k})$ $N = n_{k-1}$ $\exists\, n_k > n_{k-1}$ tel que $x_{n_k} \in B(x, \frac{1}{k})$

Pro | Nous avons l'implication :

$$a' = \lim_{x \to a} f(x) \Rightarrow \forall (x_n)_n \text{ suite de } A \text{ telle que } a = \lim x_n \text{, alors } a' = \lim f(x_n)$$

La réciproque est vraie si E est métrique.

Co | Nous avons l'implication :

$$f \text{ continue en } x_0 \Rightarrow \forall (x_n)_n \text{ suite de } E \text{ telle que } x_0 = \lim x_n \text{, alors } f(x_0) = \lim f(x_n)$$

La réciproque est vraie si E est métrique.

Démonstration :

($\Rightarrow$) Soit v' un voisinage de a' dans E'

$\exists$ voisinage v de E tel que $f(v \cap A) \subset v'$

On sait, d'autre part que :

$\exists\, N > 0$ $n > N \Rightarrow x_n \in v$

$x_n \in A$ donc $x_n \in v \cap A$

Ainsi $\forall v'$ $\exists N$ $n > N \Rightarrow f(x_n) \in v'$

c.à.d $a' = \lim f(x_n)$

($\Leftarrow$) On suppose, de plus, que E est un espace métrique.

Démontrons la contraposée :

Supposons donc f non continue en x_0.

$\exists \mathcal{V}'$ voisinage de a' dans E' tel que : $\forall \mathcal{V}$ vois. de a dans E
$\exists x_n \in \mathcal{V} \cap A \quad f(x_n) \notin \mathcal{V}'$
Prenons :

$B(a,1) \qquad \exists x_{n_1} \in B(a,1) \cap A \quad / \ f(x_1) \notin \mathcal{V}'$

$B(a,\frac{1}{k}) \qquad \exists x_k \in B(a,\frac{1}{k}) \cap A \quad / \ f(x_k) \notin \mathcal{V}'$

On obtient une suite (x_k) telle que $\lim x_n = a$ et pourtant $\lim f(x_n) \neq a'$

c) Espaces produits.

Pro 1

Soit $f : E \longrightarrow F_1 \times F_2$
$\qquad z \longmapsto (f_1(z), f_2(z))$
et $A \subset E \quad a \in \bar{A}$
Alors :

$$a' = \lim_{z \to a} f(z) \iff \begin{cases} a'_1 = \lim_{z \to a} f_1(z) \\ a'_2 = \lim_{z \to a} f_2(z) \end{cases}$$

Pro 2

Avec les mêmes hypothèses que dans la proposition 1 :
$a' = (a'_1, a'_2)$ est valeur d'adhérence de $f(z)$ pour $z \to a$

$\Downarrow$

a'_1 = val. d'adh. de $f_1(z)$ quand $z \to a$
a'_2 = val. d'adh. de $f_2(z)$ quand $z \to a$

(Nous laissons au lecteur le soin de traduire les propositions 1 et 2 en termes de suite).

⚠ La réciproque de pro. 2 est fausse. Donnons un contre-exemple :

$$\begin{cases} x_{2n} = n \\ x_{2n+1} = \frac{1}{n} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{2n} = \frac{1}{n} \\ y_{2n+1} = n \end{cases}$$

val. d'adh. 0 — val. d'adh. 0

Et pourtant (x_n, y_n) n'admet aucune valeur d'adhérence et en particulier pas le point $(0,0)$!

Preuve : (pro. 2)

$$\left.\begin{array}{l} \forall V_1' \text{ voisinage de } a_1' \text{ de } F_1 \\ \forall V_1 \quad " \quad \text{de } a \text{ de } E \end{array}\right\} \Rightarrow \exists x \in V_1 \cap A \qquad f_1(x) \in V_1' \ ?$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall V_2' \text{ voisinage de } a_2' \text{ de } F_2 \\ \forall V_2 \quad " \quad \text{de } a \text{ de } E \end{array}\right\} \Rightarrow \exists y \in V_2 \cap A \qquad f_2(y) \in V_2' \ ?$$

Or $V_1' \times V_2'$ est un voisinage de (a_1', a_2') dans $F_1 \times F_2$ et $V_1 \cap V_2$ est un voisinage de a dans E. Ainsi $\exists z \in (V_1 \cap V_2) \cap A$ tel que $f(z) \in V_1' \times V_2'$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} f_1(z) = V_1' \\ f_2(z) = V_2' \end{cases}$$

Il suffira de prendre $z = x = y$

Espaces topologiques compacts

1°/ Définitions

E désigne un espace topologique.

Def | Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) De tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous-recouvrement fini.

ii) Pour toute famille de fermés de E d'intersection vide il existe une sous-famille finie d'intersection vide.

Par définition, on dira que E est compact si E est séparé et si E vérifie i) (ou ii))

Soit $A \subset E$. A sera dit sous-ensemble compact (resp. relativement compact) de E si le sous-espace topologique A (resp. $\overline{A}$) est compact.

Pro || E e.t séparé. $A \subset E$ est compact ssi $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ U_i ouverts de E $\Rightarrow \exists J \subset I$ J fini / $A \subset \bigcup_{i \in J} U_i$

Donnons quelques exemples :

* E muni de la topologie grossière vérifie i) et ii) mais n'est pas séparé.
* E fini et séparé est compact
* Dans $\mathbb{R}$:

K compact de $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ K fermé-borné

ainsi $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $[a, b]$ est compact

$]a, b[$ est relativement compact.

2°/ Propriétés

Pro 1 | E séparé ; $A \subset E$ un compact. Prenons $x \notin A$. Alors il existe U_x voisinage ouvert de x et V ouvert contenant A tels que $U_x \cap V = \emptyset$

Preuve :

$\forall y \in A \quad \exists\, U_x(y)$ (voisinage de x) et V_y tels que $U_x(y) \cap V_y = \emptyset$

(d'après l'hyp. de séparation de E).

On recouvre A (compact) par un recouvrement $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$

(on a $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$).

On pose $U_x = \bigcap_{i=1}^{n} U_x(y_i)$ = voisinage ouvert de x

d'où $U_x \cap V = \emptyset$

Co 1 | E <u>séparé</u> et A <u>compact</u>
Alors A est <u>fermé</u> dans E

Preuve :

$x \in \complement_E A \quad \exists\, U_x$ vois. ouvert de x et $V \supset A$ ouvert tel que

$U_x \cap V = \emptyset$

donc $U_x \subset \complement_E A \Rightarrow \complement_E A$ est un ouvert.

(<u>Remarques</u> : A compact $\Rightarrow$ A relativement compact car $A = \bar{A}$ }

~~A ⊂ E compact ⇒ A compact~~ (fermé))

~~Co 2~~

Pro 2 | $A \subset E$ fermé, E compact $\} \Rightarrow$ A compact

On le démontre grace à i)

Co 2 | Autre caractérisation des "relativements compacts" :

E séparé $A \subset E$

A relativement compact $\Leftrightarrow \exists K \subset E$ K compact / $A \subset K$

Preuve :

(⇒) on prend $K = \bar{A}$

(⇐) K compact $\underset{(co.1)}{\Rightarrow}$ K fermé $\underset{(def)}{\Rightarrow}$ $\bar{A} \subset K$ $\underset{(pro\,2)}{\Rightarrow}$ $\bar{A}$ compact

Pro | E séparé.
Soit $(K_i)_{i\in I}$ des compacts de E (resp. relativement compact)
Alors $\bigcap_{i\in I} K_i$ est un compact de E (" ")

Démonstration :

* $\forall i \in I$ K_i est compact $\underset{(co.1)}{\Rightarrow}$ K_i fermé $\Rightarrow$ $\bigcap_{i\in I} K_i$ fermé de E
Or $\bigcap_{i\in I} K_i \subset K_{i_0}$ compact. Donc $\bigcap_{i\in I} K_i$ est compact.

* $\forall i \in I$ K_i est rel. compact $\Rightarrow$ $\forall i$ $\bar{K_i}$ compact
$\Rightarrow \bigcap_{i\in I} \bar{K_i}$ compact

or $\bigcap_{i\in I} K_i \subset \underline{\bigcap_{i\in I} \bar{K_i}}$

compact. D'où le résultat.

Pro 3 | E séparé.
$K_1, \dots, K_n$ compacts $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ compacts

Preuve :

Pour $n = 2$: $K_1 \cup K_2$ compact ?

Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $K_1 \cup K_2$

$\begin{cases} (U_i \cap K_1)_{i\in I} = \text{recouvrement ouvert de } K_1 \\ (U_i \cap K_2)_{i\in I} = \quad " \quad " \quad \text{de } K_2 \end{cases}$

Donc $\exists J_1$ fini $\subset I$ tel que : $K_1 = \bigcup_{i\in I_1} (U_i \cap K_1) \subset \bigcup_{i\in J_1} U_i$

$\exists J_2$ fini $\subset I$ tel que $K_2 = \bigcup_{i \in J_2} (U_i \cap K_2) \subset \bigcup_{i \in J_2} U_i$.

$J = J_1 \cup J_2$ est fini et tel que $K_1 \cup K_2 = \bigcup_{i \in J} U_i$.

Pro 4 | E et E' espaces topologiques ; $f : E \to E'$ continue
Soit $A \subset E$ compact (resp. relativement compact) et E' séparé :
Alors $f(A)$ est compact ($f : E \xrightarrow{cont} E'$ séparé, A compact $\Rightarrow f(A)$ compact)

Démonstration :

$f(A)$ séparé car E' est séparé.
Soit $(U'_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $f(A)$.
$[f^{-1}(U'_i)]_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de A. Or A est compact, donc $\exists J$ fini $\subset I$ tel que $A \subset \bigcup_{i \in J} f^{-1}(U'_i)$
alors $f(A) \subset \bigcup_{i \in J} U'_i$
CQFD

Co 4 | Soit $f : E \to E'$ continue et E' séparé.
Alors :
1) $A \subset E$ compact $\Rightarrow f(A)$ fermé de E'
2) E compact A fermé de $E \Rightarrow f(A)$ fermé de E'
3) E compact f injective $\Rightarrow f : E \to f(E)$ est un homéomorphisme (car f est continue, bijective, et fermée)

Application : Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue, où E est compact
$f(E)$ compact de $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(E)$ fermé borné

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists x_1 \in E \ / \ f(x_1) = \inf_{x \in E} f(x) \\ \exists x_2 \in E \ / \ f(x_2) = \sup_{x \in E} f(x) \end{cases}$$

Pro 5 | Soient* E_1 et E_2 deux espaces topologiques non vides
$E_1 \times E_2$ est compact $\Leftrightarrow$ E_1 et E_2 sont compacts

Preuve :

$(\Rightarrow)$ $E_1 = pr_1(E_1 \times E_2)$ $\quad pr_1 : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1$

pr_1 est continue.

Si $E_1 \times E_2$ séparé, E_1 et E_2 sont séparés.

Donc $pr_1 : \underset{\text{compact}}{E_1 \times E_2} \xrightarrow{\text{cont}} \underset{\text{séparé}}{E_1} \Rightarrow pr_1(E_1 \times E_2)$ compact (cf

$(\Leftarrow)$

Soit $(W_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $E_1 \times E_2$. Comme $E = \bigcup_{i\in I} W_i$

$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \quad \exists\, i_{(x_1,x_2)} \in I$

$\left.\begin{array}{l} \exists\, U_{x_1}(x_1,x_2) \subset E_1 \text{ ouvert et } \ni x_1 \\ \exists\, V_{x_2}(x_1,x_2) \subset E_2 \text{ ouvert et } \ni x_2 \end{array}\right\}$ tq :

$$(x_1,x_2) \in U_{x_1}(x_1,x_2) \times V_{x_2}(x_1,x_2) \subset W_{i_{(x_1,x_2)}}$$

E_2 ; $\{x_1\} \times E_2$ compact ; $W_i(x_1,x_2)$; $V_{x_2}(x_1,x_2)$; x_2 ; x_1 ; E_1 ; $U_{x_1}(x_1,x_2)$

Pour x_1 fixé $\exists\, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(n(x_1))} \in E_2$ tels que :

$$E_2 = \bigcup_{j=1}^{n(x_1)} V_{x_2^{(j)}}(x_1, x_2^{(j)})$$

où

$V_{x_1}(x_1, x_2^{(j)})$ = voisinage ouvert de x_1 dans E_1

Considérons : $U_{x_1} = \bigcap_{j=1}^{n(x_1)} U_{x_1}(x_1, x_2^{(j)})$. C'est un ouvert contenant x_1.

On a $U_{x_1} \times V_{x_2^{(j)}}(x_1, x_2^{(j)}) \subset U_{x_1}(x_1, x_2^{(j)}) \times V_{x_2^{(j)}}(x_1, x_2^{(j)})$
$\subset W_i(x_1, x_2^{(j)})$

Ψ

(x_1, x_2)

On recouvre E_1 par un nbre fini d'ouverts U_{x_1}. Soient $U_{x_1^{(1)}} \dots$ $U_{x_1^{(m)}}$. On a donc $E_1 = \bigcup_{k=1}^{m} U_{x_1^{(k)}}$

Alors : si l'on appelle $J = \{ i\,(x_1^{(k)}, x_2^{(j)}) \quad 1 \leq k \leq m \quad 1 \leq j \leq n(x_1^{(k)}) \}$

~~$E = \bigcup_{i \in J} W_i$~~

Soit $(x_1, x_2) \in E$: $\left| \begin{array}{ll} x_1 \in U_{x_1^{(k)}} & 1 \leq k \leq m \\ x_2 \in V_{x_2^{(j)}}(x_1^{(k)}, x_2^{(j)}) & 1 \leq j \leq n(x_1^{(k)}) \end{array} \right.$

donc $(x_1, x_2) \in \underbrace{U_{x_1^{(k)}} \times V_{x_2^{(j)}}(x^{(k)}, x_2^{(j)})}_{\cap \; W_i(x_1^{(k)}, x_2^{(j)})}$

c.à.d $E = \bigcup_{i \in J} W_i$. ($J$ fini)

Th | $f : A \to E'$ E' compact $A \subset E$ et $a \in \bar{A}$
Il existe au moins une valeur d'adhérence de $f(x)$ lorsque $x \to a$ ($x \in A$). Si unicité, c'est la limite

ex : Toute suite dans un e.t. compact admet au moins une valeur d'adhérence. Si elle est unique, c'est la limite de la suite.

Preuve : $\mathcal{L} = \{$ valeurs d'adhérence de f lorsque $x \to a \} = \bigcap_{V \text{ voisinage de } a} \overline{f(V \cap A)}$

Si $\mathcal{L} = \emptyset = \bigcap_{V \text{ vois. de } a} \overline{f(V \cap A)}$, alors, comme E est compact :

$\exists V_1, \dots, V_n$ voisinages de a tels que $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{f(V_i \cap A)} = \emptyset$

$$\cup$$

$$f\left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i \cap A\right) = \emptyset$$

Ce qui est absurde car $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ est un voisinage de a et $a \in \bar{A}$

lemme : $\forall V'$ ouvert de E' tel que $\mathcal{L} \subset V'$
alors $\exists V$ voisinage de a dans E tel que $f(V \cap A) \subset V'$

($\Rightarrow$ si $\mathcal{L} = \{a'\}$ $a' = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$

Preuve du lemme : $F' = E' \setminus V'$ fermé de E'
donc $\bigcap_{V \text{ vois. de } a} \overline{f(V \cap A)} \cap F' = \emptyset$

Il existe donc $V_1, \dots, V_n$ voisinages de a dans E tels que :
$\bigcap_{V_i \text{ vois. de } a} \overline{f(V_i \cap A)} \cap F' = \emptyset$

Donc $\bigcap \overline{f(V_i \cap A)} \subset V'$

$$\cup$$

$$f\left(\underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} V_i}_{= V \text{ (par exemple)}} \cap A\right)$$

3°/ Espaces localement compacts

Def : E espace topologique est dit "localement compact" si tout point de E possède un voisinage compact.

Exemples :

* E compact ⇒ E localement compact.
* $]a,b[$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ sont localement compacts
* Tout espace discret est compact.
* Théorème de Riesz : Tout espace normé localement compact est de dimension finie

Cas particulier des espaces métriques.

Commençons par quelques remarques :

1) Si E est compact, alors E est complet. En effet, toute suite de Cauchy de E possède une valeur d'adhérence dans E, et converge donc vers cette valeur.

2) $\left.\begin{array}{l} E \text{ métrique} \\ F \subset E \quad F \text{ complet} \end{array}\right\} \Rightarrow F \text{ fermé}$

En effet, si $a \in \overline{F}$ $\exists (x_n)_n$ $x_n \in F$ tel que $\lim x_n = a$

Comme $x_n \in F$ complet, $\lim x_n = a \in F$ donc $F = \overline{F}$

3) $\left.\begin{array}{l} E \text{ complet} \\ F \subset E \quad F \text{ fermé} \end{array}\right\} \Rightarrow F \text{ complet}$

Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de F. C'est aussi une suite de Cauchy de E : elle converge donc vers $x \in \overline{F} = F \Rightarrow x \in F$

4)

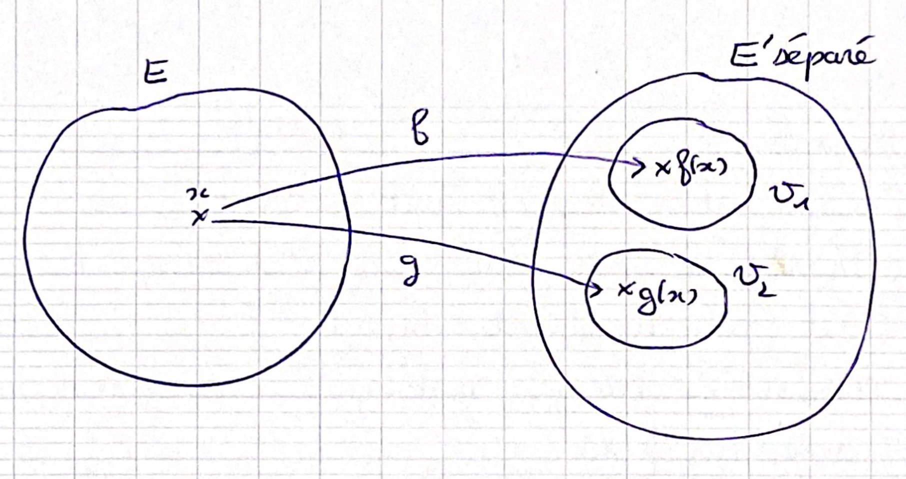
Théorème : Soit E un espace métrique complet et $F \subset E$.

Alors F complet ⟺ F fermé.

1°/ Théorème de prolongement

Pro | $f, g : E \to E'$ séparé et A dense dans E. f et g sont continues sur E.

Si $f = g$ sur A, alors $f = g$ sur E



Soit $x \in \bar{A}$. Supposons par l'absurde que $f(x) \neq g(x)$.
Comme E' est séparé :

$\exists V_1, V_2$ voisinages respectifs de $f(x)$ et de $g(x)$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

Comme f est continue en x :

$\exists U_1$ vois. de x / $f(U_1) \subset V_1$

et comme g est continue en x :

$\exists U_2$ vois. de x / $g(U_2) \subset V_2$

Je pose $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage de x et

$$\begin{cases} f(U) \subset V_1 \\ g(U) \subset V_2 \end{cases}$$

Ainsi $f(U) \cap g(U) = \emptyset$ (1)

Mais $x \in \bar{A} \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$, ce qui prouve l'existence de $a \in U \cap A$, qui vérifie $f(a) = g(a)$, et qui contredit l'égalité (1).

CQFD

Théorème de prolongement

Th (E,d) et (E',d') deux espaces métriques. On suppose E' complet et A partout dense dans E. Soit $f : A \to E'$ uniformément continue.
Alors $\exists!$ $\tilde{f} : E \to E'$ uniformément continue prolongeant f.

preuve :

$\forall x \in \bar{A} = E \quad \exists (x_n)$ suite d'élément de A / $\lim x_n = x$

Est-il possible de définir $\bar{f}(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n)$

1) Cette limite existe-t'elle ?

2) Si $(y_n)_n$ est une autre suite d'éléments de A qui converge vers x, a-t'on $\lim f(y_n) = \lim f(x_n)$?

1) Il suffit de montrer que $(f(x_n))_n$ est une suite de Cauchy.

$d'(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ dès que $d(x_n, x_m) < \eta$

car f est uniformément continue.

$\lim x_n = x \Rightarrow (x_n)$ de Cauchy $\Rightarrow \exists N \quad n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \eta$

Ainsi :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad n, m > N \Rightarrow d'(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ oui

2) $d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$ dès que $d(x_n, y_n) < \eta$

or $\begin{cases} d(x_n, x) < \frac{\eta}{2} & \text{dès que } n > N_1 \\ d(y_n, x) < \frac{\eta}{2} & \text{" } n > N_2 \end{cases}$

Pour $n > \sup(N_1, N_2)$ on a :

$d(x_n, y_n) < \eta \Rightarrow d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$

D'où $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$.

$\bar{f}$ ainsi définie convient-elle ? c.à.d :

3) A-t'on : $\forall x \in A \quad \bar{f}(x) = f(x)$?

4) $\bar{f}$ est-elle uniformément continue ?

3) Prenons la suite (x_n) définie par $x_n = x \quad \forall n$.

$\bar{f}(x) = f(x) \quad \forall x \in A$

4) $d'(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) < \varepsilon$

$x_n \to x \quad x_n \in A$

$y_n \to y \quad y_n \in A$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \quad n > N_1 \Rightarrow d'(\bar{f}(x), f(x_n)) < \frac{\varepsilon}{3}$

$\exists N_2 \quad n > N_2 \Rightarrow d'(\bar{f}(y), f(y_n)) < \frac{\varepsilon}{3}$

Enfin : $d'(f(x_n), f(y_n)) < \frac{\varepsilon}{3}$ dès que $d(x_n, y_n) < \eta$ (car f est uniformément continue sur A).

Prenons $d(x,y) < \frac{\eta}{3}$. On aura :

$$d(x_n, y_n) \leq \underbrace{d(x_n, x)}_{< \frac{\eta}{3}} + \underbrace{d(x,y)}_{< \frac{\eta}{3}} + \underbrace{d(y, y_n)}_{< \frac{\eta}{3}}$$

dès que $n > K$

d'où $d(x_n, y_n) < \eta$ dès que $n > K$ (avec $d(x,y) < \frac{\eta}{3}$)

En conclusion :

$d'(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) < \varepsilon$ dès que $n > \operatorname{Sup}(N_1, N_2, K)$

et que $d(x,y) < \frac{\eta}{3}$

$\bar{f}$ est bien uniformément continue sur E.

CQFD

" Théorème de prolongement de f linéaire continue" :

Co | E, E' sont 2 e.v. normés $E' =$ Banach
Si A est un sev de E, alors $\bar{A}$ est un sev de E.
Soit $f \in \mathcal{L}(A, E')$.
$\exists ! \ \bar{f} \in \mathcal{L}(A, E')$ prolongeant f.

Notons que, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, l'application $\varphi : E \times E \longrightarrow E$

$(x, y) \longmapsto x + \lambda y$

est une application continue. Cela étant :

A sev de $E \Leftrightarrow \varphi(A \times A) \subset A$.

Alors $\varphi(\bar{A} \times \bar{A}) = \varphi(\overline{A \times A}) \subset \overline{\varphi(A \times A)} \subset \bar{A}$

d'où $\varphi(\bar{A} \times \bar{A}) \subset \bar{A} \Leftrightarrow \bar{A} =$ s.e.v. de E

La 2e partie du corollaire est évident si l'on constate que pour f linéaire de A vers E', f continue $\Leftrightarrow$ f uniformément continue (cela provient de l'équivalence f continue ssi $\exists K > 0 \quad \|f(x)\| \leq K\|x\| \quad \forall x \in A$) Le théorème implique donc que $\exists! \bar{f}$ uniformément continue prolongeant f sur $\bar{A}$.
Montrons que $\bar{f}$ est linéaire :
Pour $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\varphi_1 : \bar{A} \times \bar{A} \longrightarrow E' \qquad (x, y) \longmapsto \bar{f}(x + \lambda y)$$

$$\varphi_2 : \bar{A} \times \bar{A} \longrightarrow E' \qquad (x, y) \longmapsto \bar{f}(x) + \lambda \bar{f}(y)$$

φ_1 et φ_2 sont continues sur $\bar{A} \times \bar{A}$. D'autre part $\varphi_1|_{A \times A} = \varphi_2|_{A \times A}$ car f est linéaire sur A. D'où (cf Proposition précédente) :

$$\varphi_1 = \varphi_2 \text{ sur } A \Leftrightarrow \bar{f} \in \mathcal{L}(\bar{A}, E')$$

2°) Espaces précompacts

Def | (E, d) métrique est dit "précompact" ssi :
$\forall \varepsilon > 0$ E peut être recouvert par un nombre fini de sous-ensembles de E de diamètre inférieur à ε.

A sous-espace métrique de E. A est dit précompact de E ssi l'espace métrique A est précompact.

Exemple : Dans $\mathbb{R}$: A précompact $\Leftrightarrow$ A borné.

Pro | E compact $\Rightarrow$ E précompact

preuve : $\forall x \in E$ $B(x, \frac{\varepsilon}{3})$
$E = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{\varepsilon}{3})$ (car E compact !) oui

Propriétés :

1) Si E est précompact et si $F \subset E$, alors F est précompact.
2) E précompact $\Rightarrow$ E borné.
3) Une réunion finie de précompacts est précompacte.

Montrons simplement le 2) :

Prenons $\varepsilon = 1$. $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ où $\delta(E_i) \leq 1$
Soit $x_i \in E_i$ fixés. Posons $\alpha = \sup_{i \neq j} d(x_i, x_j)$
$\forall x, y \in E$ $\exists i, j$ / $x \in E_i$ et $y \in E_j$
alors : $d(x,y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y)$
$d(x,y) \leq \alpha + 2$
d'où $\delta(E) \leq \alpha + 2$

(NB : le 1) nous donne immédiatement le résultat : « Si A est relativement compact, alors A est précompact ».)

4) Caractérisation d'un espace précompact E :

a)

Pro | E précompact $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists F \subset E$ fini tel que $\forall x \in E$ $d(x,F) < \varepsilon$

Preuve :

($\Rightarrow$) $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ $\delta(A_i) < \varepsilon$

$\forall i$ soit $x_i \in A_i$ et $F = \{x_1, \dots, x_n\}$

($\Leftarrow$) Soit F fini tel que $\forall x \in E$ $d(x,F) < \frac{\varepsilon}{3}$

$F = \{a_1, \dots, a_n\}$

$A_i = B(a_i, \frac{\varepsilon}{3})$. Alors, bien évidemment $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

De là, nous démontrons de nombreux corollaires :

Co 1 | E précompact $\Rightarrow$ E séparable

Preuve : $\forall n > 0$ $\exists F_n$ fini tel que $d(x, F_n) < \frac{1}{n}$

Prenons $F = \bigcup_n F_n$ dénombrable.

De plus $\forall x \in E$ $d(x,F) \leq d(x, F_n) \leq \frac{1}{n}$ $\forall n$ donc $d(x,F) = 0$

donc $x \in \bar{F}$

Co 2 | E métrique, A précompacte $\Big\}$ $\Rightarrow$ $\bar{A}$ précompact

Preuve :

$\forall \varepsilon > 0$ $\underset{\text{fini}}{\exists F}$ $\forall x \in A$ $d(x,F) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall x \in \bar{A}$ $\forall \varepsilon' > 0$ $\exists y \in A$ $d(x,y) < \varepsilon'$

$y \in A$ donc $\exists z \in F$ tel que $d(y,z) < \frac{\varepsilon}{2}$

Donc : $x \in \bar{A}$ $\exists z \in F$ tel que $d(x,z) < \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon'$ $\Rightarrow d(x,F) < \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon'$

Donc $d(x,F) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Co 3 | Soit $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ uniformément continue
E précompact $\Rightarrow f(E)$ précompact

Remarque : $]0,1] \xrightarrow{f} [1,+\infty[$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$ continue mais non uniformément

$]0,1]$ est précompact car bornée, mais pourtant $f(]0,1])$ ne l'est pas ~~don~~ car non bornée.

Preuve : $\varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x),f(y)) < \varepsilon$
$\exists F \subset E$ fini tel que $\forall x \in E \quad d(x,F) < \delta$
Posons $F' = f(F)$.
$\forall x' \in f(E) \quad x' = f(x) \in E$
$\exists y \in F \quad d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x),f(y)) < \varepsilon$
$d'(x', \underbrace{f(y)}_{\in F'}) < \varepsilon$

donc $d'(x',F') < \varepsilon$

Co 4 | Si E_1 et E_2 sont deux espaces métriques non vides, Alors :
$E_1 \times E_2$ précompact $\Leftrightarrow E_1$ et E_2 précompacts

Preuve :
$(\Rightarrow) \quad E_1 = pr_1(E_1 \times E_2) \qquad pr_1 : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1$
uniformément continue – oui

$(\Leftarrow) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists F_1$ fini $\subset E_1 \quad \forall x_1 \in E_1 \quad d_1(x_1,F_1) < \varepsilon$
$\exists F_2$ fini $\subset E_2 \quad \forall x_2 \in E_2 \quad d_2(x_2,F_2) < \varepsilon$
Posons $F = F_1 \times F_2$ (fini)

$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \quad \exists y_1 \in F_1 \quad d_1(x_1, y_1) < \varepsilon$

$\exists y_2 \in F_2 \quad d_2(x_2, y_2) < \varepsilon$

Donc $d((x_1, x_2), \underbrace{(y_1, y_2)}_{\in F}) < \varepsilon$ (pour la métrique produit définie par $d = \text{Sup}(d_1, d_2)$)

3) Espaces métriques compacts

Pro | Soit $f : (E, d) \longrightarrow (E', d')$ continue.
Si E est compact, alors f est uniformément continue.

Démonstration :

1- démonstration :

f est localement uniformément continue. "localement" dans le sens suivant :

$\forall x \in E \quad \exists \delta(x) > 0$ tel que $B(x, \delta(x)) \xrightarrow{f} E'$ cette restriction soit uniformément continue.

$\forall y, z \in B(x, \delta(x)) \qquad d'(f(y), f(z)) < \varepsilon$

(Écrivons la continuité en x :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in E \quad \exists \delta(x) > 0$ tel que $y \in B(x, \delta(x)) \Rightarrow d'(f(y), f(x)) < \varepsilon$

Comme E est compact $\quad E = \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{\delta(x_i)}{2}\right)$

Posons $\delta = \operatorname{Inf}_{i \in [1,n]} \delta(x_i)$

Si $d(y, z) < \frac{\delta}{2} \overset{?}{\Rightarrow} d'(f(y), f(z)) < \varepsilon$

$\exists 1 \leq i \leq n$ tq $y \in B\left(x_i, \frac{\delta(x_i)}{2}\right)$

si $d(y, z) < \frac{\delta}{2}$, alors y et $z \in B(x_i, \delta(x_i))$

$$d(z, x_i) \leq \underbrace{d(z, y)}_{< \frac{\delta}{2}} + \underbrace{d(y, x_i)}_{< \frac{\delta(x_i)}{2}} < \delta(x_i)$$

2- démonstration :

On a vu que :

E compact $\Rightarrow$ toute suite de E admet au moins une valeur d'adhérence.

Par l'absurde : Supposons f non uniformément continue. Alors :

$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in E \quad d(x,y) < \delta$ et $d'(f(x), f(y)) \geqslant \varepsilon$

$\delta \leq \frac{1}{n} \quad \exists x_n, y_n \in E \quad \begin{cases} d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \\ \text{et } d'(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon \end{cases}$

$\exists (x_{n_k})$ sous-suite convergente de (x_n). Soit x sa limite.

$\exists (y_{n_{k_\ell}})$ sous-suite de (y_{n_k}) qui est convergente vers y.

$\begin{cases} (x_{n_{k_\ell}})_\ell \xrightarrow[\ell \to \infty]{} y \\ (y_{n_{k_\ell}})_\ell \xrightarrow[\ell \to \infty]{} x \end{cases}$ et $x = y$ car $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \forall n$

f continue en x, donc $\begin{cases} f(x_{n_{k_\ell}}) \xrightarrow[\ell \to \infty]{} f(x) \\ f(y_{n_{k_\ell}}) \xrightarrow[\ell \to +\infty]{} f(x) \end{cases}$

ce qui est absurde puisque $d'(f(x_{n_{k_\ell}}), f(y_{n_{k_\ell}})) \geqslant \varepsilon$ pour tout ℓ.

Th | (E, d) espace métrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) E compact
2) Toute suite de E admet au moins une valeur d'adhérence.
3) E précompact et complet

1) ⇒ 2) } déjà vu
2) ⇒ ~~3)~~ complet }

Corollaire important :

Co | E = espace métrique complet   A ⊂ E
A relativement compact ⇔ A précompact
(⇒ toujours)

(⇐) A précompact ⇒ $\bar{A}$ précompact et complet } ⇔ $\bar{A}$ ~~complet~~ compact

Preuve :
~~3)~~ 2) ⇒ ~~2)~~ 3)

2) et E non précompact ⇒ absurde.
E non précompact ⇒ $\exists \varepsilon > 0$ tel que E ne peut être recouvert par un nombre fini de sous-ensembles de diamètre $< \varepsilon$.

$\forall x_1 \in E$ $E \neq B(x_1, \frac{\varepsilon}{3}) \Rightarrow \exists x_2 \in E \;/\; d(x_2, x_1) \geq \frac{\varepsilon}{3}$

$E \neq B(x_1, \frac{\varepsilon}{3}) \cup B(x_2, \frac{\varepsilon}{3}) \Rightarrow \exists x_3 \in E \;/\; d(x_3, x_1) \geq \frac{\varepsilon}{3}$
$d(x_3, x_2) \geq \frac{\varepsilon}{3}$

$E \neq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_n, \frac{\varepsilon}{3}) \Rightarrow \exists x_{n+1} \;/\; d(x_{n+1}, x_i) \geq \frac{\varepsilon}{3}$
$\forall i \in [1, n]$

(x_n) ne possède pas de valeur d'adhérence ! (sinon ∃ ss-suite de Cauchy)

3) ⇒ 1) ~~Contraposée~~ Par l'Absurde

E non compact et E précompact et complet (⇒ absurde)

* $\exists (U_i)_{i \in I}$ rec. ouvert de E qui n'admet pas de ss. rec. fini.
* E peut être recouvert par un nbre fini de boules de rayon $\frac{1}{2}$.

Parmi ces boules, il en existe au moins une B_1 qui ne peut être

recouvert par un nbre fini de U_i

2) ———————————————————— rayon $\frac{1}{2^2}$ B_2

Parmi les boules qui coupent B_1 il en existe au moins 1 qui ne peut être recouverte par un nombre fini de U_i.

Ainsi B_n de suite

$$B_1 = B(x_1, \frac{1}{2})$$
$$B_2 = B(x_2, \frac{1}{2^2})$$
$$----$$
$$B_n = B(x_n, \frac{1}{2^n})$$

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

donc $d(x_p, x_q) \leq \frac{1}{2^{p-1}} + \dots \leq \frac{1}{2^{p-2}}$ $(q \geq p)$

(x_n) suite de Cauchy de E $\overset{E \text{ complet}}{\Longrightarrow}$ $\exists x \in E$ / $\lim_{\infty} x_n = x$

$\exists r > 0$ $\exists i \in I$ tel que $B(x, r) \subset U_i$

$\forall n$ tq $d(x, x_n) < \frac{r}{2}$ et $\frac{1}{2^n} < \frac{r}{2}$ j'ai :

$$\underbrace{B(x_n, \frac{1}{2^n})}_{= B_n} \subset U_i$$

ce qui est absurde ! CQFD

Espaces fonctionnels et compacité - Théorème d'Ascoli

1°/ Equicontinuité, égale continuité

Soient E un espace topologique, (E', d'), $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(E, E')$, $x_0 \in E$

Def | On dira que $\mathcal{H}$ est "équicontinue en x_0" si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists V(\varepsilon)$ voisinage de x_0 tels que

$$x \in V(\varepsilon) \Rightarrow \begin{cases} d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \\ \forall f \in \mathcal{H} \end{cases}$$

Trivialités :

* $\mathcal{A}$ eq. en x_0, $f \in \mathcal{A}$ $\Rightarrow$ f continue en x_0
* $f_1, \dots, f_n$ continues en x_0 $\Rightarrow$ $\mathcal{A} = \{f_1, \dots, f_n\}$ eq en x_0.

Def | Si (E,d) est métrique, alors nous dirons que $\mathcal{A}$ est "également continue" si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad d(x,y) < \delta \Rightarrow \begin{cases} d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \\ \forall f \in \mathcal{A} \end{cases}$$

Trivialités :

* $\mathcal{A}$ eg. continue et $f \in \mathcal{A}$ $\Rightarrow$ f uniformément continue
* $f_1, \dots, f_n$ unif. continues $\Rightarrow$ $\mathcal{A} = \{f_1, \dots, f_n\}$ eg. continue.
* $\mathcal{A}$ eg. continue $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ eq. en tout point. Si E est un espace métrique compact, la réciproque est vraie.

* un ensemble d'applications lipschitziennes de m̂ constante est également continue

$$\mathcal{A} = \{f_K\} \qquad d'(f(x), f(y)) \leq K\, d(x,y) \quad \begin{cases} \forall x, y \in E \\ \forall f \in \mathcal{A} \end{cases}$$

2°/ Equicontinuité et précompacité

E e.t.

(E', d')

Posons $C^\infty(E,E') = \{ f : E \to E' \text{ continue et bornée} \}$

Notons :

$$D(f,g) = \sup_{t \in E} d'(f(t), g(t))$$

On notera $\mathcal{A} \subset C^\infty(E,E')$

Pro | $\mathcal{A}$ précompact $\Rightarrow$ a) $\mathcal{A}$ équicontinue en tout point.
b) $\forall x \in E$ $\mathcal{A}(x) = \{ f(x) \,/\, f \in \mathcal{A} \}$ est précompact

<u>Démonstration</u> a)

$\varepsilon > 0$ $\quad x_0 \in E$

Comme $\mathcal{A}$ est précompact :

$\exists F \subset \mathcal{A}$, fini, $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ tel que

$\forall f \in \mathcal{A} \quad \exists i \quad 1 \leq i \leq n \qquad D(f, f_i) < \varepsilon \qquad (1)$

~~F est eq.~~ f_i est continue en $x_0 \Rightarrow \exists V_{x_0} \quad \forall x \in V_{x_0} \quad d'(f_i(x), f_i(x_0)) < \varepsilon$

$x \in V_{x_0}$ on a : $d'(f(x), f(x_0)) \leq \underbrace{d'(f(x), f_i(x))}_{< \varepsilon \text{ cf}(1)} + \underbrace{d'(f_i(x), f_i(x_0))}_{< \varepsilon \text{ car } x \in V_{x_0}} + \underbrace{d'(f_i(x_0), f(x_0))}_{< \varepsilon \text{ cf}(1)}$

donc $\mathcal{A}$ est équicontinue en $x_0 \in E$ (x_0 quelconque)

b) $\mathcal{A}(x)$ est précompact ?

Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $F(x) = \{ f_1(x), \dots, f_n(x) \}$

En effet : $f(x) \in \mathcal{A}(x)$, alors $\exists i \quad 1 \leq i \leq n \quad D(f, f_i) < \varepsilon$

$\Downarrow$

$d'(f(x), f_i(x)) < \varepsilon$

donc $d'(f(x), F(x)) < \varepsilon$.

$\mathcal{A}(x)$ est bien précompact.

Réciproquement, nous obtenons le théorème d'Ascoli :

Z

Théorème d'Ascoli

Th | Si E est compact, la réciproque de la proposition précédente est vraie.

Co 1 | Si E est compact, et si E' est métrique complet (rappel : $C^\infty(E,E')$ est complet)

$\mathcal{A}$ relativement compact $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \mathcal{A} \text{ eq. en tout point} \\ \forall x \in E \quad \mathcal{A}(x) \text{ relativement compact} \end{cases}$

(NB : eq en tout point $\Leftrightarrow$ eg. cont. (où E = métrique compact))

Co 2 | Si E et E' sont compacts :
$\mathcal{A}$ relativement compact $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ eq. en tout point
(eg. continue si E métrique)

Démonstration :

$\varepsilon > 0$ donné

$\forall x \in E \quad \mathcal{A}$ équicontinue en x $\Rightarrow$ $\exists \ V(x) \quad y \in V(x) \Rightarrow \begin{cases} d'(f(y), f(x)) < \varepsilon \\ \forall f \in \mathcal{A} \end{cases}$

Comme E est compact,

$\exists \ x_1, \dots, x_n \in E$ tel que $\quad E = \bigcup_{i=1}^{n} V(x_i)$

$\mathcal{A}(x_1) \cup \dots \cup \mathcal{A}(x_n)$ précompact

$\Downarrow$

$\exists \ x'_1, \dots, x'_m$ tels que $\forall x' \in \mathcal{A}(x_1) \cup \dots \cup \mathcal{A}(x_n) \quad \exists j \quad 1 \leq j \leq m$
tels que $d'(x', x'_j) < \varepsilon$

Considérons $\Phi = \{ \varphi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\} \}$ à m^n éléments

$\forall \varphi \in \Phi \quad \mathcal{A}_\varphi = \{ f \in \mathcal{A} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad d'(f(x_i), \underbrace{x'_{\varphi(i)}}_{\text{donné}}) < \varepsilon \}$

Alors $\mathcal{A} = \bigcup_{\varphi \in \Phi} \mathcal{A}_\varphi$ et diam $< 4\varepsilon$. En effet :

* $\mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}_\varphi$? $\quad f \in \mathcal{A} \quad f(x_i) \in \mathcal{A}(x_i)$ donc $\exists j = \varphi(i)$ tel que $d'(f(x_i), x'_{\varphi(i)}) < \varepsilon$ } car $\mathcal{A}(x_i)$ précompact

$\Downarrow$

$f \in \mathcal{A}_\varphi$

* diam $\mathcal{A}_\varphi < 4\varepsilon$? $\quad f, g \in \mathcal{A}_\varphi$

$x \in E$ quelconque $\quad d'(f(x), g(x))$ à majorer !

$\exists i \quad 1 \leq i \leq n$ tel que $x \in V(x_i)$

$$d'(f(x), g(x)) \leq \underbrace{d'(f(x), f(x_i))}_{< \varepsilon \text{ car } x \in V(x_i)} + \underbrace{d'(f(x_i), x'_{\varphi(i)})}_{< \varepsilon \text{ car } f \in \mathcal{A}_\varphi} + \underbrace{d'(x'_{\varphi(i)}, g(x_i))}_{< \varepsilon \text{ car } g \in \mathcal{A}_\varphi} + \underbrace{d(g(x_i), g(x))}_{< \varepsilon \text{ car } x \in V(x_i)}$$

Espaces connexes

1°/ Définitions

Def Soit E un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Les seuls s.e. ouverts et fermés de E sont E et $\emptyset$

ii) Il n'existe pas de partition de E en 2 ouverts dont aucun n'est vide.

iii) " " en 2 fermés " "

E est dit "connexe" si l'une des propriétés ci-dessus est satisfaite.

Propriétés immédiates :

- Un ss-ensemble de E est dit connexe si le s.e.t de E correspondant est connexe.
- $\underset{(1)}{E' \subset \mathbb{R} \text{ connexe}} \Leftrightarrow \overset{(2)}{E' \text{ intervalle de } \mathbb{R}}$

$\Leftrightarrow \forall a, b \in E' \quad a < b$ alors

$\forall c \quad a < c < b \Rightarrow c \in E'$

c.à.d $[a, b] \subset E'$

Preuve :

($\Rightarrow$) S'il existe $a, b \in E'$ $(a < b)$ et c tels que $a < c < b$ et $c \notin E'$, alors prenons $U = \{x \in E' \,/\, x < c\}$ et $V = \{x \in E' / x > c\}$ (U et V ouverts), et donc $E' = U \sqcup V$ ("réunion disjointe de 2 ouverts dont aucun n'est vide"). Donc E' est non connexe.

on montre que (2) et non(1) est absurde

($\Leftarrow$) E' non connexe $\Rightarrow$ $E' = F \cup G$, F et G étant des fermés non vides de E'.
Prenons $a \in F$ et $b \in G$, et supposons (ce qui est toujours possible) que $a < b$.

Soit $a_0 = \operatorname{Sup}\{x, x \in F \cap [a, b]\}$

On suppose $[a, b] \subset E'$. (par l'absurde)

($a_0 \in [a, b] \subset E'$) et $a_0 \in F$ car F fermé dans E'.

$a_0 \in F \Rightarrow a_0 \notin G$ (réunion disjointe) et $]a_0, b] \subset G$ (lim inf d'él. de G) or G fermé de E' $\Big\} \Rightarrow a_0 \in G$ faux.

2°/ Propriétés

1) E e.t et $A \subset E$ connexe $\Rightarrow \forall B \subset E$ tel que $A \subset B \subset \bar{A}$ alors B est connexe.

Preuve : Si B non connexe, il existe C ouvert et fermé de B tel que $C \neq \emptyset$ et $C \neq B$

$C \cap A$ ouvert et fermé de A et $C \cap A \neq \emptyset$ car $\begin{cases} \bar{A}^B = B \\ C \text{ ouvert } \subset B \end{cases} \Rightarrow C \cap A \neq \emptyset$

$C \cap A \neq A$ car si $C \cap A = A$ on aurait $A \subset C$ d'où $\bar{A} \subset \bar{C}$ or $\bar{B} \subset \bar{A}$. Donc on aurait $B \subset \bar{C}$

donc $B \cap \bar{C} = B$

$\|$ adhérence de C dans B = C car C est fermé de B

2) Toute réunion d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles connexes de E dont l'intersection n'est pas vide est connexe :

connexe — non connexe.

Preuve : $\bigcup_{i \in I} A_i = U \sqcup V$ ouverts non vides de $\bigcup_{i \in I} A_i$

Soit $a \in \bigcap_{i \in I} A_i$, $a \in U$ par exemple.

Mais nous pouvons toujours écrire :

$$A_i = \underbrace{(A_i \cap U)}_{\neq \emptyset \text{ car } a \in A_i \cap U} \sqcup (A_i \cap V)$$

Comme A_i est connexe, on aura $A_i \cap V = \emptyset \Rightarrow A_i \subset U$.

Donc $\bigcup_{i \in I} A_i \subset U \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i = U \Rightarrow V = \emptyset$ contraire à $\bigcup_{i \in I} A_i$ non connexe, donc $\bigcup A_i$ connexe.

Cas particulier

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite finie de connexes de E / $\forall n$ $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$

$\Downarrow$

$\bigcup A_n$ connexes

<u>Corollaire</u> : La réunion $C(x)$ de tous les connexes de E contenant $x \in E$ est connexe. C'est le plus grand connexe de E contenant x (c'est donc un fermé de E) qui s'appelle la " composante connexe de x dans E ".

De plus, si $y \in C(x) \Rightarrow C(x) \subset C(y) \Rightarrow x \in C(y) \Rightarrow C(y) \subset C(x)$

Finalement : $C(y) = C(x)$

<u>Application</u> : Tout ouvert A de $\mathbb{R}$ est la réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts 2 à 2 disjoints.

En effet :

$$A = \bigcup_{x \in A} C(x) \qquad C(x) = \text{composante connexe de } x \text{ dans } \underline{\underline{A}}$$

$C(x)$ connexe dans $\mathbb{R} \Rightarrow C(x)$ intervalle de $\mathbb{R}$

$C(x)$ = intervalle <u>ouvert</u> de $\mathbb{R}$, { car sinon $C(x) = (\quad b]$, $b \in \mathbb{R}$

{ $b \in A \quad \exists \varepsilon > 0 \ / \ ]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\ \subset A$

{ d'où $C(x) \cup \ ]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ connexe et $x \in C(x) \subset C(x) \cup]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ d'où l'absurdité.

$\forall x \in A \quad \exists r \in \mathbb{Q} \cap A \quad r \in C(x) \Leftrightarrow C(r) = C(x)$

$$A = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap A} C(r)$$ ouvert on en extrait une partition.

Pro | E, E' e.t. Supposons que E est connexe :
Soit $f : E \to E'$ continue.
Alors $f(E)$ est connexe

Preuve :

A ouvert et fermé de $f(E) \Rightarrow f^{-1}(A)$ ouvert et fermé de E

$\Rightarrow f^{-1}(A) = \emptyset$ ou E $\Rightarrow A = \emptyset$ ou $f(E)$

(car $f : E \to f(E)$ est surjective)

Cas particulier :

Théorème de la valeur intermédiaire (Th. de Bolzano)

Th | Soient $f : E \to \mathbb{R}$ continue (E connexe), $a, b \in f(E)$ et $a < b$
Alors $\forall c \in [a, b] \quad \exists x \in E \ / \ f(x) = c$

Preuve :

$f(E)$ = connexe de $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ intervalle de $\mathbb{R}$

$a, b \in f(E) \Rightarrow [a, b] \subset f(E)$

Pro | Soient E_1 et E_2 deux espaces topologiques non vides.
Alors :

$$\underbrace{E_1 \times E_2}_{\text{connexe}} \Leftrightarrow E_1 \text{ et } E_2 \text{ connexes.}$$

Preuve :

($\Rightarrow$) $\quad E_1 = \underbrace{pr_1}_{\text{continue}}(E_1 \times E_2)$.

($\Leftarrow$) $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$

A montrer : la composante connexe de (a_1, a_2) dans $E_1 \times E_2$ est $E_1 \times E_2$.

Soit $(b_1, b_2) \in E_1 \times E_2$: $\quad \underbrace{\{a_1\} \times E_2}_{\text{connexe car homéomorphe à } E_2} \cup \underbrace{E_1 \times \{b_2\}}_{\text{connexe (m̂ raison)}} = E_1 \times E_2$

$\cdot (a_1, b_2) \in (\{a_1\} \times E_2 \cap \{ E_1 \times \{b_2\} \})$

↳ intersection non vide)

connexe qui contient (a_1, a_2) et (b_1, b_2)

d'où $(b_1, b_2) \in G \subset C(a_1, a_2)$

Pro | Si E est connexe par arcs, alors E est connexe

Preuve :

Rappelons que dire que E est connexe par arcs, c'est dire que :

$\forall a, b \in E \quad \exists \gamma : [0,1] \longrightarrow E$ continue (chemin reliant a et b) γ tel que $\begin{cases} \gamma(0) = a \\ \gamma(1) = b \end{cases}$

Supposons, par l'absurde, que E est connexe par arcs et que E n'est pas connexe

Alors $E = \underset{\ni a}{U} \sqcup \underset{\ni b}{V}$ ouverts non vides de E

et $\underbrace{\gamma([0,1])}_{\text{connexe !}} = (\gamma([0,1]) \cap U) \cup (\gamma([0,1]) \cap V)$ ouverts non vides de $\gamma([0,1])$

ce qui est absurde.

Mais il nous faut faire attention ! La réciproque de cette proposition est fausse : donnons tout de suite un contre exemple :

Soit Γ le graphe de la fonction : $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sin \frac{1}{x}$

On a $E = \overline{\Gamma}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ connexe. Or $\overline{\Gamma} = \Gamma \sqcup \{\{0\} \times [-1,1]\}$

n'est pas connexe par arcs. En effet, s'il en était ainsi, il existerait un chemin γ reliant les 2 points a et b (cf dessin) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Nécessairement, on aurait à la fois (cf. continuité de γ) :

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to 0} x(t) = 0 \\ \\ \lim\limits_{t \to 0} y(t) = b \end{cases}$$

Comme $\gamma(t) \subset E$, on devra aussi avoir $y(t) = \sin \dfrac{1}{x(t)}$

qui ne tend vers aucune limite ! D'où le résultat.

Le théorème de Baire

Le théorème de Baire est important pour ses conséquences. Valable sur les espaces métriques complets, il entraîne 2 des 3 plus grands théorèmes qui font que les espaces de Banach (i.e. e.v.n. complets) soient des outils utiles en analyse : le th. de Banach Steinhaus – le th. du graphe fermé et enfin, le théorème de Hahn-Banach.

I Théorème de Baire

Th (Cantor) | E = e. métrique complet
Soit $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés nonvides de E, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$. Alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ contient un point et un seul.

unicité : $x, y \in \bigcap F_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ d(x,y) \leq \underbrace{\delta(F_n)}_{\to 0} \Rightarrow d(x,y) = 0$ oui

existence : Choisissons $x_n \in F_n$, et montrons que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy :

$$d(x_n, x_m) \leq \underbrace{\delta(F_n)}_{\to 0 \ (n\to+\infty)} \quad \text{pour } m \geq n \quad (\text{car } F_m \subset F_n)$$

Comme E est complet, $\lim\limits_{+\infty} x_n = x$. Alors $x \in \bigcap F_n$.
En effet, si $m \geq n$ $F_m \subset F_n$ donc $(x_m)_{m\geq n}$ est une suite, de Cauchy, dans le fermé F_n. Donc $x = \lim\limits_{+\infty} x_n$, qui existe, est dans $\overline{F_n} = F_n$ (car E métrique, et F_n fermé).
cqfd

Th (Baire) | E = e. métrique complet
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ouverts partout dense de E.
Alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est partout dense.

preuve :
Soit U un ouvert non vide de E. Il faut montrer que

$$U \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \neq \emptyset$$

Notons $\overline{B(x,\varepsilon)}$ l'adhérence de $B(x,\varepsilon)$

$=\{y\in E /\ d(y,x)\} < \varepsilon\}$

(attention ! en général $\overline{B(x,\varepsilon)} \subsetneq \{y / d(y,x) \leq \varepsilon\}$)

Alors :

$\overline{U_1} = E \Rightarrow \exists r_1 < 1 \quad \exists x_1 \in \overline{B(x_1, r_1)} \subset U \cap U_1$

$\overline{U_2} = E \Rightarrow \exists r_2 < \frac{1}{2} \quad \exists x_2 \in \overline{B(x_2, r_2)} \subset B(x_1, r_1) \cap U_2 \subset U \cap U_1 \cap U_2$

$\overline{U_n} = E \Rightarrow \exists r_n < \frac{1}{n} \quad \exists x_n \in \overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap U_n \subset U \cap U_1 \cap \ldots \cap U_n$

On obtient une suite récurrente (x_n).

* <u>$(x_n)_n$ est une suite de Cauchy</u>

En effet, si $m > n$ $\quad x_m \in B(x_n, r_n) \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{1}{n}$

Donc $\exists x = \lim_{+\infty} x_n$ (car E complet)

* <u>$x \in U \cap (\cap U_n)$</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. La suite $(x_m)_{m \geq n}$ est une suite de $\overline{B(x_n, r_n)}$, fermé, et converge donc <u>dans</u> ce fermé.

Par suite $\lim_{+\infty} x_m = x \in \overline{B(x_n, r_n)} \subset U \cap \ldots \cap U_n$.

CQFD

<u>Remarques</u> : En général, $\cap U_n$ n'est pas un ouvert, comme le montre le contre-exemple :

$E = \mathbb{R} \quad U_n = \mathbb{R} \setminus \{q_n\}$ où $\mathbb{Q} = \{q_n / n \in \mathbb{N}\}$.

On a $\bigcap_n U_n$ = irrationnels = non ouvert.

Voici une autre forme du th. de Baire :

<u>Théorème</u> : E e.m. complet. Soit $(F_n)_n$ une famille de fermés tels que $\mathring{F}_n = \emptyset$.
Alors $\overset{\circ}{\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n}} = \emptyset$

preuve : Posons $U_n = \complement F_n$, alors $\overline{U_n} = \overline{\complement F_n} = \complement \mathring{F}_n = E \Rightarrow$ (Th. Baire) $\overline{\cap U_n} = E$

d'où $\complement \overline{\cap U_n} = \emptyset \Leftrightarrow \overset{\circ}{\complement(\cap U_n)} = \emptyset \Leftrightarrow \overset{\circ}{\bigcup_n F_n} = \emptyset \qquad$ CQFD

II Théorème de Banach-Steinhaus

(ou th. de la borne uniforme)

Th
> E = Banach
> F = e.v.n
> Soit $(f_i)_{i\in I}$ une suite de fonctions linéaires continues de E vers F, qui vérifient :
> $$\forall x \in E \quad \exists K_x \in \mathbb{R}_+ \ / \ \forall i \in I \quad \|f_i(x)\|_F \leq K_x$$
> Alors : $\exists K>0$ tel que $\|f_i(x)\|_F \leq K\|x\|_E \quad \forall x \in E \quad \forall i \in I$

Posons $F_n = \{x\in E \ / \ \|f_i(x)\|_F \leq n \quad \forall i \in I\}$. F_n est un fermé de E, comme intersection d'images réciproques de fermés par des appl. continues. Notons que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ et que : $\forall x \in E \quad x\in F_n$ dès que $n \geq K_x$

Utilisons le théorème de Baire :

$$\overset{\circ}{\overline{\bigcup F_n}} = E \neq \emptyset \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \overset{\circ}{F}_{n_0} \neq \emptyset \Rightarrow \exists \ \overline{B(x_0,r)} \subset \overset{\circ}{F}_{n_0}$$

Alors :
$$\|x-x_0\|_E \leq r \Rightarrow \forall i\in I \quad \|f_i(x)\|_F \leq n_0$$
$$\|x-x_0\|_E \leq r \Rightarrow \forall i\in I \quad \|f_i(x-x_0)\|_F \leq n_0 + K_{x_0}$$
$$\|y\| \leq r \Rightarrow \forall i \in I \quad \|f_i(y)\| \leq n_0 + K_{x_0} \qquad (1)$$

Pour z quelconque dans E, prenons $y = r\dfrac{z}{\|z\|}$. On obtient, grâce à (1):

$$\|f_i(z)\| \leq \underbrace{\frac{n_0+K_{x_0}}{r}}_{K} \|z\| \qquad \forall i \in I$$

CQFD

III Théorème du graphe fermé.

Admettons sans démonstration le "théorème de l'inverse continue" :

Th
> Si E et F sont 2 espaces de Banach, toute application linéaire continue bijective est un isomorphisme d'ev.

(NB : isomorphisme = homéomorphisme linéaire)

Alors :

Théorème du graphe fermé.

Th $f : E \to F$ linéaire, où E et F sont des Banach
Si le graphe de f est fermé dans $E \times F$, alors f est continue

preuve :

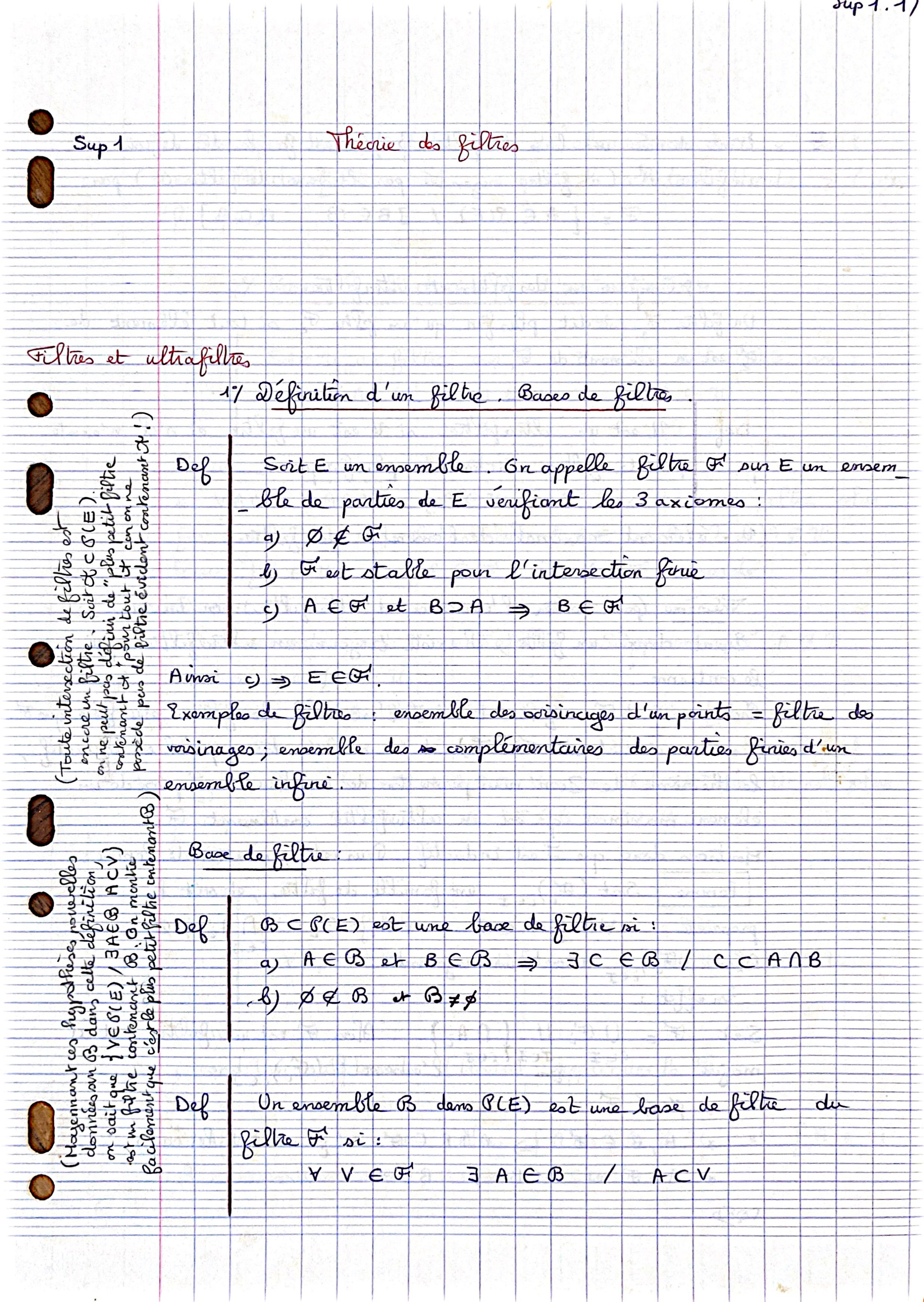
$G \subset \underbrace{E \times F}_{\text{Banach}}$ $\quad \varphi : G \to E$, $(x, f(x)) \mapsto x$ est bijective, linéaire, continue.

Le théorème de l'inverse continue nous dit qu'alors

$\varphi^{-1} : E \to G$, $x \mapsto (x, f(x))$ est continue.

D'où : $E \to F$, $x \mapsto f(x)$ est continue.

CQFD



Sup 1

Théorie des filtres

Filtres et ultrafiltres

1/ Définition d'un filtre. Bases de filtres.

Def Soit E un ensemble. On appelle filtre $\mathcal{F}$ sur E un ensemble de parties de E vérifiant les 3 axiomes :

a) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

b) $\mathcal{F}$ est stable pour l'intersection finie

c) $A \in \mathcal{F}$ et $B \supset A \Rightarrow B \in \mathcal{F}$

(Toute intersection de filtres est encore un filtre. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. On ne peut pas définir de "plus petit filtre contenant $\mathcal{A}$" car on ne possède pas de filtre évident contenant $\mathcal{A}$!)

Ainsi c) $\Rightarrow E \in \mathcal{F}$.

Exemples de filtres : ensemble des voisinages d'un point = filtre des voisinages ; ensemble des complémentaires des parties finies d'un ensemble infini.

Base de filtre :

Def $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ est une base de filtre si :

a) $A \in \mathcal{B}$ et $B \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists C \in \mathcal{B} \ / \ C \subset A \cap B$

b) $\emptyset \notin \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \neq \emptyset$

Def Un ensemble $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{P}(E)$ est une base de filtre du filtre $\mathcal{F}$ si :

$$\forall V \in \mathcal{F} \quad \exists A \in \mathcal{B} \ / \ A \subset V$$

(Maintenant ces hypothèses nouvelles données sur $\mathcal{B}$ dans cette définition, on sait que $\{V \in \mathcal{P}(E) \ / \ \exists A \in \mathcal{B} \ A \subset V\}$ est un filtre contenant $\mathcal{B}$. On montre facilement que c'est le plus petit filtre contenant $\mathcal{B}$)

Etant donné une base de filtre $\mathcal{B}$, il est facile de définir un filtre $\mathcal{F}$ (= filtre engendré par la base de filtre $\mathcal{B}$) par :

$$\mathcal{F} = \{ A \in \mathcal{P}(E) \ / \ \exists B \in \mathcal{B} \quad B \subset A \}$$

2°) Comparaison des filtres et Ultrafiltres

Un filtre $\mathcal{F}_1$ est dit plus fin qu'un filtre $\mathcal{F}_2$ si tout élément de $\mathcal{F}_2$ est un élément de $\mathcal{F}_1$.

Def | $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre si $\mathcal{U}$ est un filtre et s'il n'existe pas de filtres strictement plus fin que $\mathcal{U}$.

($\mathcal{U}$ = élément maximal de l'ensemble des filtres)

Théorème (pour montrer l'existence d'ultrafiltre non triviaux) :
"Etant donné un filtre, il existe toujours un ultrafiltre qui le contienne".

Preuve : Soit $\mathcal{F}$ un filtre et soi $\mathcal{S}$ l'ensemble des filtres plus fins que $\mathcal{F}$. $\mathcal{S}$ est non vide (car $\mathcal{F} \in \mathcal{S}$) et si nous montrons qu'il est inductif, le "théorème de Zorn" nous permettra de conclure : $\mathcal{S}$ possède un élement maximal qui est un ultrafiltre contenant $\mathcal{F}$.

Montrons donc que $\mathcal{S}$ est inductif. Pour cela, montrons le lemme :

lemme Soit $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ une famille de filtres, et soit la propriété : $\forall J$ fini $\subset I \quad \forall A_i \in \mathcal{F}_i \quad \bigcap_{i\in J} A_i \neq \emptyset$

Alors $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ admet un majorant.

En effet :

Soit $\mathcal{F} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_i \cup \bigcup_{\substack{J\subset I \\ \text{fini}}} \{ \bigcap_{i\in J} A_i \}$. Alors $\mathcal{F}$ est un filtre, et il majore l'ensemble $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$.

* $\emptyset \notin \mathcal{F}$
* $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$ (faire tous les cas)
* $A \in \mathcal{F}$ et $A \subset B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$ oui.

CQFD

Remarque : les ultrafiltres sont des "éléments maximaux" de l'ensemble des filtres sur E pour la relation d'ordre $\geq$ (plus fin que).

3°/ Propriétés caractéristique d'un ultrafiltre

Th | Soit $\mathcal{U}$ un filtre sur E. $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre ssi :
$\forall A \subset E \quad A \in \mathcal{U}$ ou $\complement A \in \mathcal{U}$

Preuve :

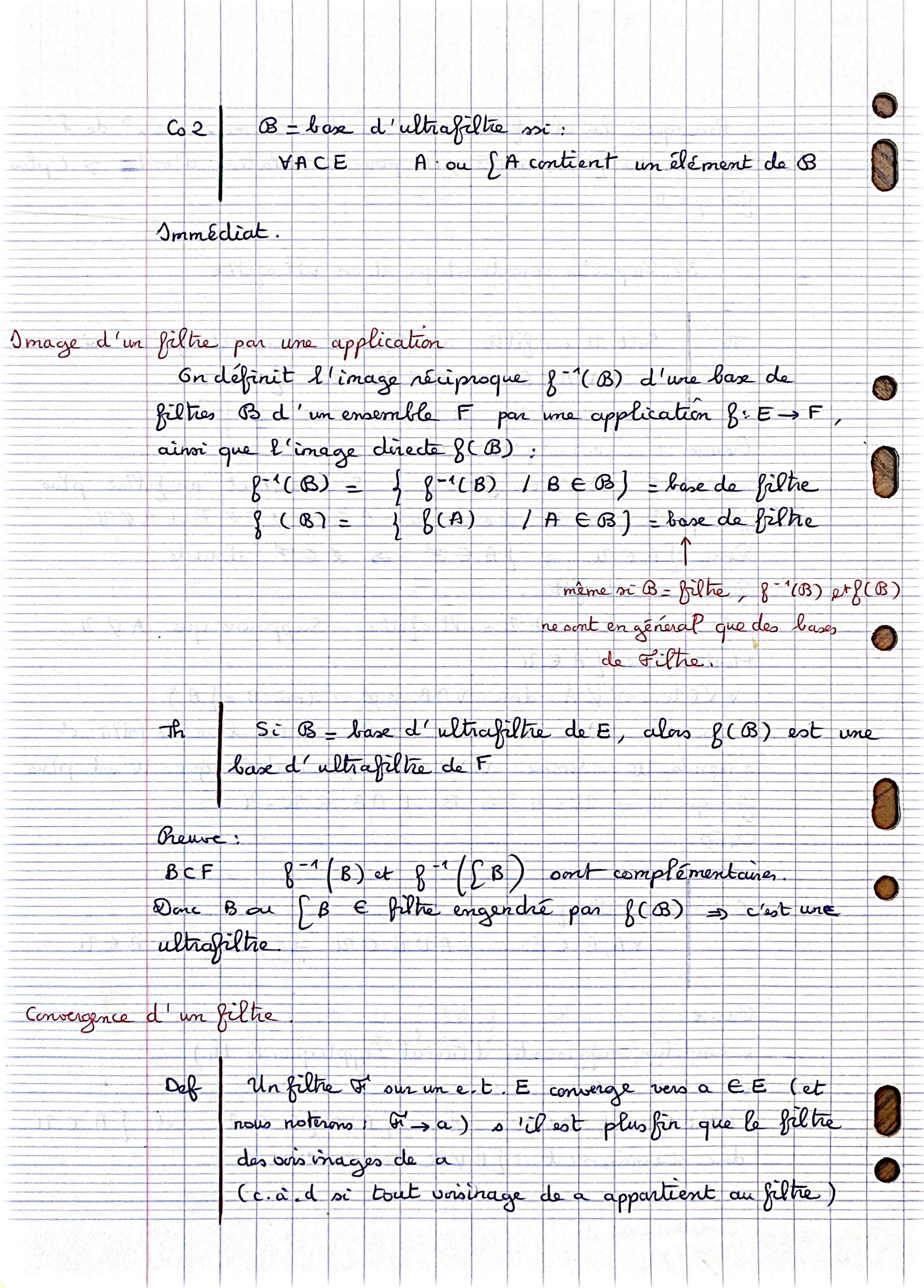
* $\forall A \subset E \quad A \in \mathcal{U}$ ou $\complement A \in \mathcal{U}$. S'il existait un filtre plus fin que $\mathcal{U}$, soit $\mathcal{F}$, il existerait $A \subset E$ / $A \in \mathcal{F}$ et $A \notin \mathcal{U}$.
Donc $\complement A \in \mathcal{U} \Rightarrow \complement A \in \mathcal{F} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F}$ absurde.
Donc $\mathcal{U}$ = ultrafiltre.
* Inversement, soit $\mathcal{U}$ = ultrafiltre. Supposons que $A \notin \mathcal{U}$.
Montrons que $\complement A \in \mathcal{U}$.
$\forall V \in \mathcal{U} : V \not\subset A$ donc $V \cap B \neq \emptyset$ (où $B = \complement A$)
L'ensemble $V \cap B$ où V parcourt $\mathcal{U}$ est une base de filtre et engendre $\mathcal{W}$. Comme $V \cap B \subset V$, on déduit que $\mathcal{W}$ est plus fin que $\mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{W} = \mathcal{U} \Rightarrow B = E \cap B \in \mathcal{W} = \mathcal{U}$.
CQFD

Cor | $\mathcal{U}$ = ultrafiltre ssi
$\forall A, B \subset E \quad A \cup B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \in \mathcal{U}$ ou $B \in \mathcal{U}$

Preuve :

* condition suffisante (trivial : appliquer le th)
* " nécessaire :

$A \cup B \in \mathcal{U}$ et $A \notin \mathcal{U}$. Alors $\complement A \cap \complement B \notin \mathcal{U}$ et $\complement A \in \mathcal{U}$
donc nécessairement $\complement B \notin \mathcal{U} \Rightarrow B \in \mathcal{U}$



Co 2 | $\mathcal{B}$ = base d'ultrafiltre ssi :
$\forall A \subset E$ A ou $\complement A$ contient un élément de $\mathcal{B}$

Immédiat.

Image d'un filtre par une application

On définit l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{B})$ d'une base de filtres $\mathcal{B}$ d'un ensemble F par une application $f : E \to F$, ainsi que l'image directe $f(\mathcal{B})$:

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{ f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B} \} = \text{base de filtre}$$
$$f(\mathcal{B}) = \{ f(A) \mid A \in \mathcal{B} \} = \text{base de filtre}$$

↑ même si $\mathcal{B}$ = filtre, $f^{-1}(\mathcal{B})$ et $f(\mathcal{B})$ ne sont en général que des bases de filtre.

Th | Si $\mathcal{B}$ = base d'ultrafiltre de E, alors $f(\mathcal{B})$ est une base d'ultrafiltre de F

Preuve :
$B \subset F$ $f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(\complement B)$ sont complémentaires.
Donc B ou $\complement B \in$ filtre engendré par $f(\mathcal{B})$ $\Rightarrow$ c'est une ultrafiltre

Convergence d'un filtre.

Def | Un filtre $\mathcal{F}$ sur un e.t. E converge vers $a \in E$ (et nous noterons : $\mathcal{F} \to a$) s'il est plus fin que le filtre des voisinages de a
(c.à.d si tout voisinage de a appartient au filtre)

Th | Si E e.t. séparé, alors la limite d'un filtre est unique.

On généralise 2 théorèmes importants, vus au sujet des suites, et qui sont valables (énoncé avec les suites) pour des espaces métriques. Ici, nous n'avons pas besoin d'imposer à l'espace E d'être métrique pour obtenir les énoncés avec les filtres :

Th1 | E espace topologique, $A \subset E$.
$\bar{A} = \{ a \in E \ / \ \exists$ filtre $\mathcal{F}$ tel que $* A \in \mathcal{F}$, $* \mathcal{F} \to a \}$

Th2 | $f : E \to F$ (espaces topologiques)
f continue en $a \in E$ ssi
$\forall \mathcal{F} \to a$ alors $f(\mathcal{F}) \to f(a)$

(cf démonstrations sur le Schwarz)

<u>Rappel des énoncés relatifs aux suites</u> :

<u>Th1</u> : Si E est un espace <u>métrique</u>, alors :
$\bar{A} = \{ a \in E \ / \ \exists a_n \in A \quad \lim a_n = a \}$

<u>Th2</u> : $f : E \to F$ (E espace <u>métrique</u>). Alors f est continue en $a \in E$ ssi : quelle que soit la suite $(a_n)_n$ convergeant vers a, l'on a : $\lim f(a_n) = f(a)$.

D'où la <u>supériorité</u> des filtres sur les suites.

Applications linéaires continues entre espaces normés.

1°/ Applications multilinéaires continues.

$E_1, \dots, E_n, E'$ étant des espaces normés, on note $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; E')$ l'espace vectoriel des applications multilinéaires continues de $E_1 \times \dots \times E_n$ vers E'. On peut munir cet espace d'une norme canonique :

Th Soit $f : E_1 \times \dots \times E_n \to E'$ une application n-linéaire. ~ entre :
1) f continue en $(0, \dots, 0)$
2) f continue sur $E_1 \times \dots \times E_n$
3) $\exists M > 0 \ / \ \forall x_k \in E_k \ \|f(x_1, \dots, x_n)\| \leq M \|x_1\| \dots \|x_n\|$

preuve :

* 1) $\Rightarrow$ 2) Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in E = E_1 \times \dots \times E_n$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad / \quad \|x\| < \delta \Rightarrow \|f(x)\| < \varepsilon$

On a :

$$\|f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)\| \leq \|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(a_1, x_2, \dots, x_n)\| + \dots + \|f(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)\|$$

$$< \varepsilon \text{ dès que } \sup_{k \in [1,n]} \|x_k - a_k\| < \eta$$

Il est clair que 2) $\Rightarrow$ 1) et que 3) $\Rightarrow$ 1). Montrons que :

* 1) $\Rightarrow$ 3)

$\exists \eta \ / \quad \forall i \ \|x_i\| < \eta \Rightarrow \|f(x_1, \dots, x_n)\| < 1$

Soit $y \in E$ tel que $y_i \neq 0$ pour tout $i \in [1, n]$. $z = \left(\frac{\eta}{2} \frac{y_1}{\|y_1\|}, \dots, \frac{\eta}{2} \frac{y_n}{\|y_n\|}\right)$ est un vecteur vérifiant $\|z\| < \eta$. Donc

$$\left\| f\left(\frac{\eta}{2}\frac{y_1}{\|y_1\|}, \dots, \frac{\eta}{2}\frac{y_n}{\|y_n\|}\right)\right\| < 1$$

$$\|f(y)\| \leq \frac{2^n}{\eta^n}\|y_1\| \dots \|y_n\| \qquad (1)$$

Ceci pour tout $y \in E$ / $y_i \neq 0$ $\forall i \in [1, n]$.
Si $y \in E$ vérifie $y_{i_0} = 0$, alors $f(y) = 0$ et (1) est encore vraie.
Donc $\|f(y)\| \leq$ cte $\|y_1\| \dots \|y_n\|$ $\forall y \in E$.
cqFd

Co | $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n ; E')$ est un e.v.n. pour la norme :

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x_1\| \dots \|x_n\|}$$

Remarque :

$\|f\| = \mathrm{Inf}\left\{ M \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \forall x \ \ \|f(x)\| \leq M\|x_1\| \dots \|x_n\| \right\}$
et

$$\|f\| = \sup_{\{x \in E / \|x\| \leq 1\}} \|f(x_1, \dots, x_n)\| = \sup_{\{x \in E / \|x\| = 1\}} \|f(x_1, \dots, x_n)\|$$

Pro | Si E' est un Banach, alors $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n ; E')$ est un Banach.

preuve :
(Rappel : E' Banach $\Leftrightarrow$ E' e.v.n. complet)
Soit (f_k) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n ; E')$:
$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists k_0 > 0 \ \ \ k, l \geq k_0 \Rightarrow \|f_k(x_1, \dots, x_n) - f_l(x_1, \dots, x_n)\| \leq \varepsilon \|x_1\| \dots \|x_n\|$
$\forall x \in E \qquad (1)$

Si $x_1, \dots, x_n$ sont fixés, on en déduit que $(f_k(x_1, \dots, x_n))_k$ est une suite de Cauchy de E', donc converge vers $f(x_1, \dots, x_n)$.
Par suite $f : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow E'$ est multilinéaire

(par passage à la limite sur k).
Faisons tendre $\ell \to +\infty$ dans (1) :

$$\| f_k(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n) \| \leq \varepsilon \|x_1\| \dots \|x_n\| \qquad (2)$$

(continuité de la norme)

D'où $\begin{cases} \|f(x_1, \dots, x_n)\| \leq (\varepsilon + \|f_k\|) \|x_1\| \dots \|x_n\| \\ \text{pour } k \geq k_0 \end{cases}$

ce qui prouve que f est continue. Enfin, l'inégalité (2) montre que $\|f_k - f\| \leq \varepsilon$ dès que $k \geq k_0$, et donc que $f_k \xrightarrow[\| \|_{\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n, E')}]{} f$ pour $k \to +\infty$.

CQFD

2°/ Applications linéaires continues.

Tout le paragraphe précédent s'applique. $\mathcal{L}(E,F)$ est muni de la norme canonique $\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$ et

Th | $F = \text{Banach} \Rightarrow \mathcal{L}(E, F) = \text{Banach}$.

Proposition : Si $E \xrightarrow{f} E' \xrightarrow{g} E''$ sont des appl. lin. continues, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, E'')$ et $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$

En effet, $\forall x \in E \quad \|g \circ f(x)\| \leq \|g\| \|f(x)\| \leq \|g\| \|f\| \|x\|$
d'où $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$

3°/ Théorème de prolongement. (cf. chapitre 1)

Th | Soient E et E' deux espaces normés, et E' Banach. Soit F un sev de E partout dense. Alors
$f \in \mathcal{L}(F, E') \Rightarrow \exists! \bar{f} \in \mathcal{L}(E, E')$ prolongeant f.

Espaces normés de dimension finie

1°/ Equivalence de toutes les normes si $\dim E < \infty$

lemme : E = e.v. de dimension $n < \infty$, normé par $\| \| = \sup | |$.
Soit p une autre norme sur E. Alors p est continue.

En effet : Soit $(a_1, ..., a_n)$ une base de E.
$\forall x, y \in E \quad |p(x) - p(y)| \leq p(x-y) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \, p(a_i)$

Prop | Toutes les normes sur un e.v. de dimension finie sont équivalentes.

preuve : Soit E de dimension n, muni d'une norme $\| \|_1$.
Il existe une isométrie φ_1 de E sur $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}$ = corps de base, on peut mettre $\mathbb{C}$), à savoir :

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i a_i & \longrightarrow & (x_1, ..., x_n) \end{array}$$

E muni de $\| \|_1$ et $\mathbb{R}^n$ muni de p_1 défini par : $p_1(x) = \| \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \|_1$
Ainsi :

$$\begin{array}{ccc} (E, \| \|_1) & & (E, \| \|_2) \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 \\ (\mathbb{R}^n, p_1) & & (\mathbb{R}^n, p_2) \end{array}$$

(*) Si nous montrons que p_1 est une norme équivalente à p_2, alors les topologies de $(\mathbb{R}^n, p_1)$ et de $(\mathbb{R}^n, p_2)$ seront les mêmes, donc pareil pour les topologies de $(E, \| \|_1)$ et de $(E, \| \|_2)$, ce qui prouvera que $\| \|_1$ et $\| \|_2$ sont équivalentes.

Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|x\| = \sup_{i=1,n} |x_i|$. D'après le lemme précédent, p_1 et p_2 sont continues sur $(\mathbb{R}^n, \| \|)$.
$S = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\| = 1\}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$, donc un compact de $\mathbb{R}^n$, et p_i $(i=1,2)$ ne s'annule pas sur S. Ainsi, l'application :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{p_2(x)}{p_1(x)} \end{array}$$

est continue de S dans $\mathbb{R}$.
$\varphi(S)$ = compact de $\mathbb{R}$, par suite $\varphi(S)$ est borné dans $\mathbb{R}$, c.à.d : $\forall x \in S \quad m\, p_1(x) \leq p_2(x) \leq M\, p_1(x)$

Par homogénéité :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad m\, p_1(x) \leq p_2(x) \leq M\, p_1(x)$$

ce qui prouve que p_1 et p_2 sont des normes équivalentes.
cqFd

(*) Nous avons utilisé, dans ce baratin, la proposition suivante :

Def | Deux normes sur un e.v E sont équivalentes si les topologies associées à ces normes sont les mêmes. On note $p_1 \sim p_2$

Pro 2 | p_1, p_2 étant 2 normes sur E,
$p_1 \sim p_2 \iff \exists\, m, M > 0 \,/\, m\, p_1 \leq p_2 \leq M\, p_1$

preuve : $p_1 \sim p_2 \iff$ l'application $\mathrm{Id} : (E, p_1) \longrightarrow (E, p_2)$, $x \longmapsto x$

est bicontinue $\iff$ (cf. p. 2.1°/ Théorème) $\exists M > 0 \;\; \exists m > 0$ tels que $\forall x \in E \quad m\, p_1(x) \leq p_2(x) \leq M\, p_1(x)$

CQFD

Voici quelques résultats qui découlent de la Pro 1 :

Corollaire 1 : Pour tout espace normé E de dimension finie n, l'isomorphisme $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) $\longrightarrow$ E

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad (e_i) \text{ base de } E$$

est bicontinu.

Corollaire 2 : Tout s.e.v. de dimension finie d'un espace normé E est complet, et donc fermé dans E.

Corollaire 3 : Toute application multilinéaire de $E_1 \times \dots \times E_n$ dans l'e.v. F où $E_1, \dots, E_n$ sont de dimension finie et où F est quelconque, est continue.

Corollaire 4 : Toute application linéaire de E dans F (E et F e.v.n) est continue.
dim $E < \infty$

preuve 1 : $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty) \xrightarrow{f} (E, \| \|)$ $\quad \|x\|_\infty = \sup_{i \in [1,n]} |x_i|$

$\downarrow$ Id

φ : $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty) \longrightarrow (E, \| \|'_\infty)$

φ = isométrie can.

Id est bicontinue (où $\| \|'_\infty$ = norme transportée)
puisque les normes $\| \|$ et $\| \|'_\infty$ sur l'ev E de dimension finie sont équivalentes.
Par suite f (et f^{-1}) est continue.

preuve 2 : $F \subset E$, F de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. $f : \mathbb{R}^n \to F$ défini ci-dessus est un isomorphisme d'e.v. (linéaire bijectif et bicontinu). Par suite, $\mathbb{R}^n$ complet $\Rightarrow$ F complet.

preuve 3 : dans cet énoncé, E_i sont des evn et F un e.v. topologique. Soit $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ bilinéaire.
Soit $(a_1, \dots, a_n)$ (resp. $(b_1, \dots, b_m)$) une base de E_1 (resp. de E_2)

$\forall x \in E_1 \qquad x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$

$\forall y \in E_2 \qquad y = \sum_{j=1}^{m} y_j b_j$

d'où $\quad f(x,y) = \sum_{i,j} x_i y_j \underbrace{f(a_i, b_j)}_{cte}$

$\forall i,j$ l'application $(x,y) \longmapsto x_i y_j$ est continue. Il en est de même de f d'après les axiomes d'un e.v.t.

preuve 4 : comme en 3.

2°/ Théorème de Frédéric Riesz

Soit E un e.v. normé sur K. K = ℝ ou ℂ est un corps localement compact. Il en est de même pour tout espace K^n et donc aussi de tout espace normé de dimension finie.
La réciproque est vraie, et constitue le théorème de Riesz :

Théorème de Riesz

Th | Tout espace normé localement compact est de dimension finie.

Démonstration :

Dire que E est localement compact veut dire que

$\forall x_0 \in E \quad \exists U_{x_0}$ voisinage de x_0 / U_{x_0} compact

C'est équivalent à

$\forall x_0 \in E \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \bar{B}(x_0, \varepsilon)$ compact

$\Updownarrow$

$\bar{B}(0,1)$ compact

La dernière implication se montrant grâce à la bijection bicontinue : $h : \bar{B}(0,1) \longrightarrow \bar{B}(x_0, \varepsilon)$

$$x \longmapsto x_0 + \varepsilon x = h(x)$$

$\bar{B}(0,1)$ est compacte, donc :

$$\exists x_1, \dots, x_n \in \bar{B}(0,1) \; / \; \bar{B}(0,1) = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \tfrac{1}{2})$$

Soit F le sev engendré par $x_1, \dots, x_n$.

$F = (x_1, \dots, x_n)$ est égal à E. Raisonnons par l'absurde :

Si $\exists x \in E \; / \; x \notin F$, comme F, de dimension finie, est un fermé de E,

$$d = d(x, F) > 0$$

et, en particulier :

$$\exists y \in F \; / \; d \leq \|x - y\| < 2d$$

$y' = y + x_i \|x-y\| \in F$

Considérons $z = \dfrac{x-y}{\|x-y\|} \in \bar{B}(0,1)$

$\exists i \in [1, n] \; / \; \|z - x_i\| < \frac{1}{2}$. Alors :

$$\|\underbrace{x - y - x_i \|x-y\|}_{\in F}\| < \frac{1}{2}\|x-y\| < d$$

ce qui contredit le fait que $d(x, F) = d$.

CQFD

Exemple :

$\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\| \|_\infty$ est de dimension infini, et n'est donc pas localement compact. On peut d'ailleurs le voir directement en considérant la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(t) = t^{2^n}$ pour $t \in [0,1]$. On montre que $f_n \in \bar{B}(0,1)$ et que pour tout $n \neq m$ $\|f_n - f_m\|_\infty \geqslant \frac{1}{4}$, donc $\bar{B}(0,1)$ non compact.

Espaces normés quotients

Soit E un e.v.n et F un sev de E. On munit E/F de la topologie quotient qui était définie par l'une des assertions équivalentes :
a) U' ouvert de $E/F \Leftrightarrow \pi^{-1}(U')$ ouvert de E
b) C'est la topologie la plus fine rendant la surjection canonique $\pi : E \longrightarrow E/F$ continue.

Pro | Si E est un evn, l'application $\pi : E \longrightarrow E/F$ est ouverte

(càd : $\forall U$ ouvert de E $\pi(U)$ est un ouvert de E/F)

$E/F \simeq E'$

E

$\pi(U)$

U

$\pi^{-1}(\pi(U))$

$E' \oplus F$

F

(le dessin a été fait en dimension 2, et E' est un supplémentaire quelconque de F. On montre en effet que $E/F \simeq E'$ grâce à l'application $x \mapsto$ projection de x sur E' // à F.)

On a $\quad \pi^{-1}(\pi(U)) = \{x+y \ / \ x \in U \text{ et } y \in F\}$
$$= \bigcup_{y \in F} \underbrace{(U+y)}_{\text{ouvert}}$$

$U+y$ est ouvert comme translaté de l'ouvert U. (La translation a toutes les vertus possibles !) Le lecteur le montrera, et constatera que cela provient du fait que E est normé et que, par suite, $d(x, x_0) = d(x+a, x_0+a)$.

Pro | Si F est fermé, $\|\dot{x}\| = \operatorname{Inf}_{z \in \dot{x}} \|z\|$ définit une norme sur E/F.
De plus, la topologie associée à cette norme est la topologie quotient.

preuve :

* $\|\dot{0}\| = 0$ car $0 \in \dot{0}$

et $\|\dot{x}\| = 0 \Rightarrow \exists z_n \in \dot{x} = x+F \ / \ \lim_{n \to +\infty} z_n = 0$

Or $x+F$ est fermé (translaté d'un fermé), donc $0 \in \dot{x} \Leftrightarrow \dot{x} = \dot{0}$.

* $\|\lambda \dot{x}\| = \operatorname{Inf}_{z \in \dot{x}} \|\lambda z\| = |\lambda| \operatorname{Inf}_{z \in \dot{x}} \|z\| = |\lambda| \, \|\dot{x}\|$

* $\|\dot{x} + \dot{y}\| = \|\dot{\overline{x+y}}\| = \operatorname{Inf}_{z \in \overline{x+y}} \|z\| \leq \operatorname{Inf}_{\substack{t \in \dot{x} \\ u \in \dot{y}}} \|t+u\| \leq \operatorname{Inf}_{\substack{t \in \dot{x} \\ u \in \dot{y}}} \|t\| + \|u\|$

d'où $\quad \|\dot{x} + \dot{y}\| \leq \operatorname{Inf}_{t \in \dot{x}} \|t\| + \operatorname{Inf}_{u \in \dot{y}} \|u\| = \|\dot{x}\| + \|\dot{y}\|$

D'autre part, $\pi : (E, \| \ \|) \longrightarrow (E/F, \| \ \|)$ est continue parcequ'elle est linéaire et $\|\dot{x}\| \leq \|x\| \quad \forall x \in E$. Donc la topologie quotient est plus fine que la topologie associée à la norme $\| \ \|$ sur E/F.

Inversement, soit U' un ouvert pour la topologie quotient, et $\dot{x} \in U'$. Cherchons $\varepsilon > 0$ tel que $B(\dot{x}, \varepsilon) \subset U'$.

$\pi^{-1}(U')$ est un ouvert de E, donc $\exists \varepsilon > 0 \ / \ B(x, \varepsilon) \subset \pi^{-1}(U')$

Alors $\forall \dot{y} \in E/_F \ / \ \|\dot{y} - \dot{x}\| < \varepsilon$ on a :

$\exists a \in F \ / \ \|y - x + a\| < \varepsilon$

d'où $y + a \in B(x, \varepsilon) \subset \pi^{-1}(U') \Rightarrow \dot{y} \in U'$

ce qui prouve que $B(\dot{x}, \dot{\varepsilon}) \subset U'$.

Les deux topologies sont égales.

CQFD

Hyperplans et formes linéaires

1°/ Rappels concernant les hyperplans

Définition : Soit E un e.v. sur $\mathbb{C}$, H un sev de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\dim_{\mathbb{C}} E/_H = 1$

ii) $\forall a \in E \quad a \notin H \quad E = H \oplus \mathbb{C}a$

iii) $\exists a \in E \quad a \notin H \quad E = H \oplus \mathbb{C}a$

iv) $\exists f \neq 0 \quad f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ telle que $H = \operatorname{Ker} f$

On dit alors que H est un hyperplan de E.

En effet :

$i \Rightarrow ii$ Soit $a \notin H$, alors $\dot{a} \neq \dot{0} \Rightarrow \dot{a} =$ base de $E/_H$. Du coup : $\forall x \in E \quad \exists \lambda \in \mathbb{C} \ / \ \dot{x} = \lambda \dot{a} \Leftrightarrow x - \lambda a \in H$

donc $E = H + \mathbb{C}a$. De plus, λ est unique, donc $E = H \oplus \mathbb{C}a$.

$ii \Rightarrow iii)$ trivial.

$iii \Rightarrow iv)$ On pose $f : \quad E = H \oplus \mathbb{C}a \longrightarrow \mathbb{C}$

$$x = y + \lambda a \longmapsto \lambda$$

f est $\mathbb{C}$-linéaire, $f(a) = 1$ et $\operatorname{Ker} f = H$.

$iv \Rightarrow i)$ $\exists a \in E \ / \ f(a) \neq 0 \Rightarrow a \notin H \Leftrightarrow \dot{a} \neq \dot{0}$

$\dot{a}$ est une base de $E/_H$ puisque :

$$\forall x \in E \quad \exists! \lambda \in \mathbb{C} \ / \ f(x) = \lambda f(a) \Leftrightarrow x - \lambda a \in H$$
$$\Leftrightarrow \dot{x} = \lambda \dot{a}$$

cqfd

Proposition : Soit H un hyperplan de E, et soit $f_i \in \mathcal{L}(E,\mathbb{C})$, $f_i \neq 0$

Alors $H = \operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Ker} f_2 \iff f_1$ et f_2 proportionnelles

preuve : Pour $a \notin H$, on a $E = H \oplus \mathbb{C}a$

Donc $f_1(a) . f_2(a) \neq 0$ et $f_1 = \dfrac{f_1(a)}{f_2(a)} f_2$.

Inversement, si $\exists \lambda (\neq 0) \,/\, f_1 = \lambda f_2$, on a bien

$$H = \{x \in E / f_1(x) = 0\} = \{x \in E / f_2(x) = 0\}$$

cqfd

2°) Cas où E est un e.v.n.

Pro 1 | Si E désigne un espace normé, et si H est l'hyperplan de E défini par la forme linéaire non nulle $f : E \to \mathbb{C}$, on a : f continue $\iff$ H fermé.

preuve :

$(\Rightarrow)$ évident

$(\Leftarrow)$ Soit $\varepsilon > 0$. $\exists a' \in E \,/\, |f(a')| = \varepsilon$

$a' + H$ est fermé comme translaté du fermé H. Comme $a' \notin H$, $0 \notin a' + H$ et donc :

$\exists \delta > 0 \,/\, B(0,\delta) \cap (a'+H) = \emptyset$

Alors

$$x \in B(0,\delta) \overset{(1)}{\Rightarrow} |f(x)| < |f(a')| = \varepsilon$$

ce qui prouve que f est continue.

Pour montrer (1), on suppose, par l'absurde, qu'il existe $x \in B(0,\delta)$ tel que $|f(x)| \geq |f(a')|$. Alors $f(x) \neq 0$, et $\dfrac{f(a')}{f(x)} x \in B(0,\delta)$

Comme d'autre part :

$$f\left(\frac{f(a')}{f(x)} x\right) = f(a') \Rightarrow \frac{f(a')}{f(x)} x \in a' + H$$, on aurait $\dfrac{f(a')}{f(x)} x \in B(0,\delta) \cap (a'+H)$.

cqfd.

cours feuille 2.6/
2°/ Pro 1

Notes sur le cours. (TOPOLOGIE)

Note 1 Théorème : f = forme linéaire sur E, e.v.n. ($f \neq 0$)
Alors f continue $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker} f$ est fermé.

preuve : ($\Leftarrow$) si $H = \mathrm{Ker} f$ est fermé, on considère : $E \xrightarrow{f} \mathbb{C}$, $\pi \downarrow$, $E/H \xrightarrow{\tilde{g}} \mathbb{C}$

g est surjective, donc c'est un isomorphisme d'e.v. donc $\dim E/H = 1 < \infty$. Par (*) suite g continue $\Longleftrightarrow$ f continue CQFD

(E/H, $\|\bar{x}\| = \inf_{x \in \bar{x}} \|x\|$) est un e.v. normé. car H est fermé

((*) c'est là où on utilise le fait que E/H est normé ! car si $g : E \to F$ e.v. normés tels que $\dim E < \infty$, alors g linéaire $\Rightarrow$ g continue.)

- Exercice : Soit le diagramme $E \xrightarrow{f} F$, $\pi \downarrow$, $E/H \xrightarrow{\tilde{g}} F$. Montrer que f continue $\Leftrightarrow$ g continue (E/H muni de la topo quotient).

Note 2

Remarque : Le lecteur est prié de constater qu'un s.e.v. M de E est maximal dans l'ensemble des sev de E distincts de E ssi M est un hyperplan de E. D'où la proposition :

Pro 2 | Si E est un espace normé, un hyperplan de E est fermé ou dense dans E.

En effet, $H \subset \bar{H} \subset E$ et $\bar{H}$ = sev de E. Comme H est maximal, on en déduit : $\bar{H} = H$ ou $\bar{H} = E$.

Pro 3 | E = e.v. normé.
sev F fermé
sev G dim finie } $\Rightarrow$ F + G fermé.

démonstration : On peut se limiter au cas où G est de dimension 1 (car, si dim G = 2, $G = \mathbb{C}a + \mathbb{C}a'$ et $F' = F + \mathbb{C}a$ est fermé, donc aussi $F + G = F' + \mathbb{C}a'$)

Prenons donc $G = \mathbb{C}a$. Si $a \in F$, alors $F + G = F$ fermé. Le cas intéressant est celui où $a \notin F$. Alors $F \oplus \mathbb{C}a$ est fermé ?

Soit $x \in \overline{F \oplus \mathbb{C}a}$ (adhérence dans E).

$\exists y_n \in F \ \exists \lambda_n \in \mathbb{C} \ / \ x_n = y_n + \lambda_n a \longrightarrow x \quad (n \to +\infty)$

Considérons $f : F \oplus \mathbb{C}a \longrightarrow \mathbb{C}$

$y + \lambda a \longmapsto \lambda$

f est une forme linéaire sur $F \oplus \mathbb{C}a$, qui définit F ($\ker f = F$).

F fermé dans E $\Rightarrow$ F = hyperplan fermé de $F \oplus \mathbb{C}a$. D'après Pro 1, f est continue.

f linéaire continue $\Rightarrow$ f uniformément continue dans $F \oplus \mathbb{C}a$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $F \oplus \mathbb{C}a$. Comme $f(x_n) = \lambda_n$ (et f unif. cont), $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{C}$, donc : $\exists \lambda \in \mathbb{C} \ / \ \lim_{+\infty} \lambda_n = \lambda$

Alors $y_n = \underbrace{x_n}_{\downarrow x} - \underbrace{\lambda_n a}_{\downarrow \lambda a} \rightarrow x - \lambda a \in E$

$y_n \in F$ fermé, donc $x - \lambda a \in \bar{F} = F \Rightarrow x \in F \oplus \mathbb{C}a$.
On a bien montré que $\overline{F \oplus \mathbb{C}a} \subset F \oplus \mathbb{C}a$, et donc que $F \oplus \mathbb{C}a$ était fermé.

CQFD

Les espaces normés ont été étudiés, en particulier par Banach, avant même qu'on ait développé la théorie générale des espaces vectoriels topologiques, et espaces semi-normés.
~~Les~~ Le théorème~~s~~ fondamental ~~aux~~ concernant les espaces normés est ~~sont~~ le~~s~~ théorème~~s~~ de HAHN - BANACH ~~et de BANACH - STEINHAUS~~.

Théorème de Hahn - Banach.

1°/ Cas réel.

a) Préliminaires d'algèbre linéaire.

On appelle sous-espace affine de E (ou "variété linéaire de E") le translaté d'un sev de E, et hyperplan affine de E le translaté d'un hyperplan vectoriel de E.

Proposition : équivalence entre

1) M est un hyperplan affine de E
2) $\exists$ g forme affine non ~~nulle~~ constante / $M = \{x \in E / g(x) = 0\}$

(NB : g est dite "forme affine" ssi $\exists \ell$, linéaire de E vers $\mathbb{C}$, telle que $g(x) = \ell(x) + c$ où $c \in \mathbb{C}$.)

<u>Proposition</u> : E = e.v. normé. Alors, si M est un hyperplan affine de E, M fermé $\Leftrightarrow$ g continue

<u>Lemme</u> : 2 formes linéaires f_1 et f_2 de E, égales sur un hyperplan ne contenant pas 0, sont égales.

preuve : $M = x_0 + H$ où H = hyp. vectoriel de E.

$0 \notin M \Leftrightarrow x_0 \notin H$, donc $E = H \oplus \mathbb{C}x_0$ et

$$\forall x \in E \quad x = h + \lambda x_0 = \underbrace{x_0 + h}_{\in H} + \underbrace{(\lambda - 1)x_0}_{\in H}$$

et $f_1(x) = f_1(x_0 + h) + (\lambda - 1) f_1(x_0)$
$= f_2(x_0 + h) + (\lambda - 1) f_2(x_0) = f_2(x)$

b) <u>Théorème géométrique ; cas réel</u>.

<u>Théorème Hahn-Banach, géométrique dans le cas réel</u>

Th	E e.v. normé sur $\mathbb{R}$; Ω ouvert convexe $\neq \emptyset$ de E ; F un s.e.v. de E, non vide, tel que $F \cap \Omega = \emptyset$ Il existe un hyperplan H fermé, de E, tel que $F \subset H$ et $H \cap \Omega = \emptyset$

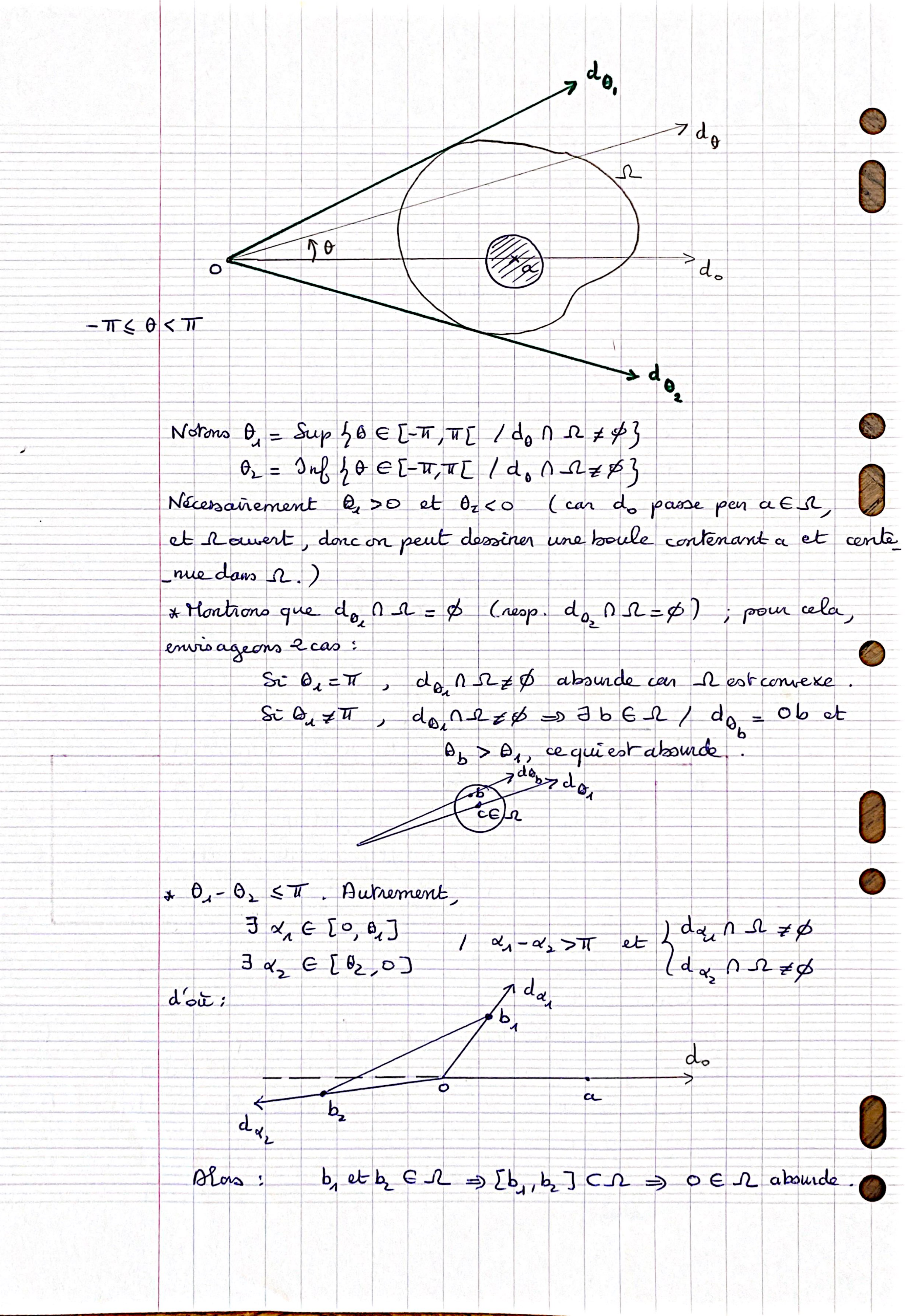
démonstration :

<u>Cas où dim E = 2</u>

Alors $E \simeq \mathbb{R}^2$ (algébriquement et topologiquement). On oriente $\mathbb{R}^2$ pour pouvoir parler de mesures d'angles de demi-droites.

$F \cap \Omega = \emptyset$ et $\Omega \neq \emptyset$, donc dim F = 0 ou 1. Si dim F = 1, on prend H = F.

Sinon, $F = \{0\}$ et $0 \notin \Omega$.



$-\pi \leq \theta < \pi$

Notons $\theta_1 = \text{Sup}\{\theta \in [-\pi, \pi[\ / \ d_\theta \cap \Omega \neq \emptyset\}$

$\theta_2 = \text{Inf}\{\theta \in [-\pi, \pi[\ / \ d_\theta \cap \Omega \neq \emptyset\}$

Nécessairement $\theta_1 > 0$ et $\theta_2 < 0$ (car d_0 passe par $a \in \Omega$, et Ω ouvert, donc on peut dessiner une boule contenant a et contenue dans Ω.)

* Montrons que $d_{\theta_1} \cap \Omega = \emptyset$ (resp. $d_{\theta_2} \cap \Omega = \emptyset$) ; pour cela, envisageons 2 cas :

Si $\theta_1 = \pi$, $d_{\theta_1} \cap \Omega \neq \emptyset$ absurde car Ω est convexe.

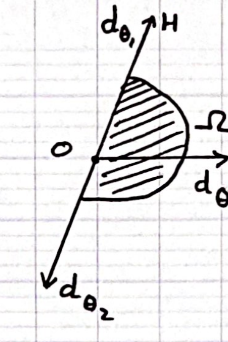
Si $\theta_1 \neq \pi$, $d_{\theta_1} \cap \Omega \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, b \in \Omega \ / \ d_{\theta_b} = Ob$ et $\theta_b > \theta_1$, ce qui est absurde.

* $\theta_1 - \theta_2 \leq \pi$. Autrement,

$\exists\, \alpha_1 \in [0, \theta_1]$, $\exists\, \alpha_2 \in [\theta_2, 0]$ / $\alpha_1 - \alpha_2 > \pi$ et $\begin{cases} d_{\alpha_1} \cap \Omega \neq \emptyset \\ d_{\alpha_2} \cap \Omega \neq \emptyset \end{cases}$

d'où :

Alors : b_1 et $b_2 \in \Omega \Rightarrow [b_1, b_2] \subset \Omega \Rightarrow O \in \Omega$ absurde.



D'où la conclusion :

Si $\theta_1 - \theta_2 = \pi$, $d_{\theta_1} \cap \Omega = \emptyset$ et $d_{\theta_2} \cap \Omega = \emptyset$

On prend l'hyperplan H défini par $D_{\theta_1} \cup d_{\theta_2}$

Si $\theta_1 - \theta_2 < \pi$, on prend d_{θ_1} (ou d_{θ_2}) complété.

Cas général :

Posons $\mathcal{A} = \{A \text{ sev. de } E \ / \ F \subset A \text{ et } A \cap \Omega = \emptyset\}$

$F \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ est ordonné pour l'inclusion. Montrons que $\mathcal{A}$ est inductif : soit $\mathcal{A}'$ un sous-ensemble totalement ordonné de $\mathcal{A}$. Alors $B = \bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A$ est un e.v. et appartient à $\mathcal{A}$. De plus, B majore tout élément de $\mathcal{A}'$. Donc $(\mathcal{A}, \subset)$ est inductif. L'axiome de Zorn nous dit qu'il existe un élément maximal dans $\mathcal{A}$. Notons H cet élément.

H est fermé, puisque $\overline{H}$ = sev de E vérifie :

$$F \subset H \subset \overline{H} \quad \text{et} \quad \overline{H} \cap \Omega = \emptyset \quad (\text{cf. } \Omega \text{ ouvert et } H \cap \Omega = \emptyset)$$

Donc $\overline{H} = H$.

<u>Montrons que H est un hyperplan de E</u>

$E/_H$ est un e.v. normé sur $\mathbb{R}$, et $\pi : E \longrightarrow E/_H$ est linéaire continue, ouverte. Donc $\pi(\Omega)$ est un ouvert convexe, non vide.

Il est clair que $\dot{0} \notin \pi(\Omega)$ puisque $H \cap \Omega = \emptyset$.

Supposons par l'absurde que $\dim E/_H \geq 2$. Alors il existe un plan vectoriel P de $E/_H$ tel que $P \cap \pi(\Omega) \neq \emptyset$.

$\Lambda = P \cap \pi(\Omega)$ est un ouvert convexe non vide de P, ev de dimension 2, et $\dot{0} \notin \Lambda$.

On peut appliquer la 1e partie :

$\exists D$ droite de P / $D \cap \Lambda = D \cap \pi(\Omega) = \emptyset$

Prenons $H_1 = \pi^{-1}(D)$. H_1 est un sev de E vérifiant :

$$\pi^{-1}(0) = H \underset{\neq}{\subset} H_1$$

et $H_1 \cap \Omega = \emptyset$ puisque $H_1 \cap \Omega \subset H_1 \cap \pi^{-1}(\pi(\Omega)) = \emptyset$

[cf : $H_1 \cap \Omega \subseteq \pi^{-1}(D) \cap \pi^{-1}(\pi(\Omega)) = D \cap \pi(\Omega) = \emptyset$]

$F \subset H \Rightarrow F \subset H_1$.

Ainsi $H_1 \in \mathcal{A}$ et H_1 majore strictement l'élément maximal H ! C'est absurde.

Donc : $\dim E/_H = 1 \Leftrightarrow H$ est un hyperplan de E.

CQFD

Co | Soient E un evn sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert convexe non vide de E, et M une variété linéaire de E telle que $M \cap \Omega = \emptyset$. Alors il existe une variété linéaire hyperplane fermée H contenant M et telle que $H \cap \Omega = \emptyset$.

preuve : il suffit de considérer l'ouvert $\Omega - x_0$ et le sev F intervenant dans l'écriture de $M = x_0 + F$, pour pouvoir appliquer le théorème.

c) Théorème analytique, cas réel.

Théorème Hahn-Banach, analytique, dans le cas réel.

Th | Soient E un e.v. normé et p une semi-norme continue sur E. Soit F un s.e.v. de E et $f : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $\forall x \in F \quad |f(x)| \leq p(x)$

Alors : $\exists \hat{f} \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ telle que

$$\hat{f}|_F = f \quad \text{et} \quad |\hat{f}(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in E$$

démonstration :

(rappel : $p : E \to \mathbb{R}_+$ est une semi-norme si
1) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
2) $\forall x, y \in E \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$)

* Si $f = 0$, on prend $\hat{f} = 0$
* Si $f \neq 0$, on pose $\Omega = \{x \in E \,/\, p(x) < 1\}$. Ω est un ouvert car p est continue, non vide ($0 \in \Omega$) et convexe (car p est une semi-norme).

$M = \{x \in F \,/\, f(x) = 1\}$ est une variété linéaire hyperplane de F telle que $M \cap \Omega = \emptyset$.

Par le corollaire précédent, il existe une variété lin. hyperplane fermée H de E telle que $M \subset H$ et $H \cap \Omega = \emptyset$. On a $0 \notin H$, donc :

$\exists !\, \hat{f} : E \to \mathbb{R}$ linéaire continue / $H = \{x \in E \,/\, \hat{f}(x) = 1\}$

Je dis que $\hat{f}$ convient :

* $\hat{f}|_F = f$

En effet, $\hat{f}$ et f sont 2 formes linéaires sur F qui coïncident sur M (variété linéaire hyperplane de F ne contenant pas 0), donc coïncident sur F tout entier.

* $|\hat{f}(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in E$?

- Si $x \in H$ $\hat{f}(x) = 1$ et $p(x) \geq 1$ car $H \cap \Omega = \emptyset$, donc $|\hat{f}(x)| \leq p(x)$
- Si $\hat{f}(x) = 0$, évident.
- Si $\hat{f}(x) \neq 0$, on pose $\hat{f}(x) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda x \in H$. On peut appliquer le premier point :

$$|\hat{f}(\lambda x)| \leq p(\lambda x) \Rightarrow |\hat{f}(x)| \leq p(x)$$

CQFD

Le corollaire suivant est essentiel : si on devait ne retenir qu'une

chose du th. de Hahn-Banach, c'est ce corollaire :

Z

Co	E e.v. normé sur $\mathbb{R}$
	F sev de E
	$f \in \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$
	Alors il existe $\hat{f} \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ vérifiant
	$\hat{f}\|_F = f$ et $\|\hat{f}\| = \|f\|$

En d'autres termes, on peut prolonger f en une forme linéaire continue $\hat{f} \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ sans changer sa norme.

preuve :

On considère $p(x) = \|f\| \|x\|$. C'est une semi-norme continue sur E, et l'on a $|f(x)| \leq \|f\| \|x\| \quad \forall x \in F$

D'où $\exists \hat{f} : E \to \mathbb{R}$ linéaire continue / $\hat{f}|_F = f$

et $|\hat{f}(x)| \leq \|f\| \|x\|$

Donc $\|\hat{f}\| \leq \|f\|$.

Comme $\hat{f}|_F = f$, $\forall x \in F \quad |f(x)| = |\hat{f}(x)| \leq \|\hat{f}\| \|x\|$

ce qui prouve que $\|f\| \leq \|\hat{f}\|$.

En conséquence, $\|\hat{f}\| = \|f\|$.

CQFD

2°/ Cas complexe

a) Lien entre hyperplans complexes et réels.

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E, \mathbb{C})$.

L'application :

$$\mathcal{R} : \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R})$$
$$f \longmapsto \mathcal{R}f = g$$

est un $\mathbb{R}$-isomorphisme d'e.v. sur $\mathbb{R}$

(c.à.d : un "homéomorphisme linéaire")

* $\mathcal{R}$ est $\mathbb{R}$-linéaire, continue.

$\forall x \in E \quad |\mathcal{R}(f)(x)| = |g(x)| \leq |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|$

Donc $\|\mathcal{R}(f)\| \leq \|f\|$ ce qui prouve, d'une part, que $\mathcal{R}f$ est continue, d'autre part, que $\mathcal{R}$ est continue, de norme $\|\mathcal{R}\| \leq 1$

* $\mathcal{R}$ est bijective.

Soit $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R})$. S'il existe $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E, \mathbb{C})$ / $\mathcal{R}f = g$, on aura $f = g + ih$ où h est une fct à valeurs réelles. h est $\mathbb{R}$-linéaire, et :

$$\begin{cases} f(ix) = g(ix) + i\,h(ix) \\ i f(x) = i g(x) - h(x) \end{cases}$$

et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E, \mathbb{C})$ impliquent que :

$$\begin{cases} h(x) = -g(ix) \\ g(x) = h(ix) \end{cases} \Leftrightarrow h(x) = -g(ix)$$

Ainsi, si f existe, elle est unique et donnée par :

$$f(x) = g(x) - i g(ix)$$

Montrons que f ainsi défini convient, càd, est $\mathbb{C}$-linéaire :

$$\begin{aligned} f((a+ib)x) &= g((a+ib)x) - i g((a+ib)ix) \\ &= a(g(x) - i g(ix)) + ib\,(g(x) - i g(ix)) \\ &= (a+ib) f(x) \end{aligned}$$

oui

* $\mathcal{R}^{-1}$ est continue : Théorème de l'inverse continue ($\mathcal{R}$ est linéaire bijective continue entre 2 banachs, donc $\mathcal{R}^{-1}$ est continu)

cqFd

Soit maintenant H un hyperplan complexe de E,

$$H = \ker f \quad \text{où } f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E, \mathbb{C}) \ , f \neq 0 .$$

On écrit : $f = g + ih$ où $h(x) = -g(ix)$

et $g, h \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R})$

$f \neq 0 \Leftrightarrow g \neq 0 \Leftrightarrow (g \neq 0 \text{ et } h \neq 0)$

Posons : $H_R = \ker g$

H_R est un hyperplan réel, et :

$$\ker h = \{x \in E \,/\, ix \in H_R\} = i H_R$$

Ainsi :

$$\boxed{H = H_R \cap i H_R}$$

"Tout hyperplan complexe s'écrit comme l'intersection de 2 hyperplans H_R et $i H_R$ réels".

Pour finir, remarquons que :

(E evn)

H fermé $\Leftrightarrow$ f continue $\Leftrightarrow$ g continue $\Leftrightarrow$ H_R fermé.

b) Théorème géométrique, cas complexe

Théorème Hahn-Banach, géométrique, dans le cas complexe

Th | E e.v. normé sur $\mathbb{C}$

Ω ouvert convexe $\neq \emptyset$

F sev complexe de E tel que $F \cap \Omega = \emptyset$

Alors il existe un hyperplan complexe fermé H de E tel que $F \subset H$ et $H \cap \Omega = \emptyset$.

démonstration : on utilise le théorème réel.

$\exists H_0$ hyperplan réel de E / $F \subset H_0$ et $H_0 \cap \Omega = \emptyset$

Alors $H = H_0 \cap i H_0$ est un hyperplan complexe fermé de E. On a :

* $F \subset H$ puisque $\left.\begin{array}{l} F \subset H_0 \\ \underbrace{F = iF}_{} \subset i H_0 \end{array}\right\} \Rightarrow F \subset H$

(car F = sev complexe)

* $H \cap \Omega = \emptyset$ (car $H_0 \cap \Omega = \emptyset$.)

CQFD

c) Théorème analytique, cas complexe.

Théorème de Hahn-Banach, analytique, cas complexe.

Th | Soient E un e.v. normé sur $\mathbb{C}$ et p une semi-norme continue sur E. Soit F un sev de E et $f : F \to \mathbb{C}$ une forme $\mathbb{C}$-linéaire telle que $\forall x \in F \quad |f(x)| \leq p(x)$

Alors : $\exists \hat{f} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E, \mathbb{C})$ telle que

$$\hat{f}|_F = f \quad \text{et} \quad |\hat{f}(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in E$$

démonstration : on utilise le théorème réel ;

Posons $g = \mathcal{R} f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R})$

$$|g(x)| \leq |f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in F$$

Il existe donc $\hat{g} : E \to \mathbb{R}$ linéaire continue prolongeant g et vérifiant $|\hat{g}(x)| \leq p(x) \ \forall x \in E$ (cf. th. réel)

$\hat{f}(x) = \hat{g}(x) - i\hat{g}(ix)$ est une forme linéaire complexe qui vérifie :

* $\forall x \in F \quad \hat{f}(x) = g(x) - i g(ix) = f(x)$
* $\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall x \in E \qquad \mathcal{R}(\lambda \hat{f}(x)) = \mathcal{R}(\hat{f}(\lambda x)) = \hat{g}(\lambda x)$

d'où $|\mathcal{R}(\lambda \hat{f}(x))| \leq p(\lambda x)$

Si $\hat{f}(x) = 0$, on a $|\hat{f}(x)| \leq p(x)$.

Sinon, on prend $\lambda = \dfrac{\overline{\hat{f}(x)}}{|\hat{f}(x)|}$, et l'on obtient :

$$\frac{|\hat{f}(x)|^2}{|\hat{f}(x)|} \leq \frac{|\hat{f}(x)|}{|\hat{f}(x)|} p(x) \Rightarrow |\hat{f}(x)| \leq p(x)$$

CQFD

Utilisation pratique du théorème de Hahn - Banach

1°/ Espaces normés réflexifs.

Lemme : Soient E un e.v.n. et $x_0 \in E \setminus \{0\}$. Il existe $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ telle que $f(x_0) = \|x_0\|$ et $\|f\| = 1$

preuve : Considérons $F = \mathbb{R}x_0$ (ou $\mathbb{C}x_0$)

Soit $\varphi : F \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$

$\lambda x_0 \longmapsto \lambda \|x_0\|$

φ est linéaire, continue et $\|\varphi\| = 1$

D'après le théorème de Hahn-Banach (analytique), $\exists\, \hat{\varphi} \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ linéaire continue, telle que

$$\begin{cases} \hat{\varphi}|_F = \varphi \Rightarrow \hat{\varphi}(x_0) = \|x_0\| \\ \|\hat{\varphi}\| = \|\varphi\| = 1 \end{cases}$$

On prend $f = \hat{\varphi}$.

CQFD

On pose :

$E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ = dual topologique de E (= Banach)

$E'' = \mathcal{L}(E', \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ = bidual " de E (= Banach)

Pro | Soit E un e.v. normé. L'application

$$h : E \longrightarrow E''$$
$$x \longmapsto \tilde{x} \ / \ \tilde{x}(f) = f(x)$$

est une application linéaire qui conserve la norme

(NB : Une "isométrie vectorielle" ou "application orthogonale" est une application linéaire bijective qui conserve la norme. Ici, h est injective mais il manque la surjectivité pour dire que h est une isométrie)

preuve :

Remarquons tout d'abord que $\tilde{x} \in E''$ puisque :

$$\|\tilde{x}(f)\| = |f(x)| \leq \|f\| \|x\| \implies \|\tilde{x}\| \leq \|x\|$$

Il est clair que h est linéaire. Montrons qu'elle conserve la norme

Si $x \neq 0$, $\exists f \in E' / \tilde{x}(f) = f(x) = \|x\|$ et $\|f\| = 1$. Donc :

$$\|\tilde{x}\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|\tilde{x}(f)|}{\|f\|} \geq \|x\| \quad , \text{ et } \|\tilde{x}\| = \|x\|$$

cqfd

Def | Soit E un e.v.n. E est dit "réflexif" si l'application $h : E \longrightarrow E''$, $x \longmapsto \tilde{x}$ est une isométrie (c.à.d si h est surjective)

(NB : on peut alors identifier E et son bidual)

Remarques :

1) Un réflexif est un Banach
2) Un hilbert est toujours réflexif (cf. chapitre sur les hilberts)

Exemples :

* $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$ est un Banach, mais n'est pas réflexif
* ℓ^p $(1<p<\infty)$ est réflexif, et $(\ell^p)' \simeq \ell^{p'}$ où $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$
* ℓ^1 et ℓ^∞ ne sont pas réflexifs. On a $(C_0)' \simeq \ell^1$ et $(\ell^1)' \simeq \ell^\infty$

donc C_0 n'est pas réflexif. ℓ^∞ n'est pas réflexif car sinon C_0, fermé dans ℓ^∞, serait réflexif.

2°/ Critère de densité.

Le théorème de Hahn-Banach sert à prouver qu'un sous-espace F est dense dans E, grâce à la proposition :

Pro | E = e.v.n. sur K $(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$

$\overline{F} = \{x_0 \in E \ / \ (f \in \mathcal{L}(E,K) \ / \ f|_F = 0) \Rightarrow f(x_0)=0\}$

Co (Hahn-B)

| E = e.v. normé (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
| F = sev de E
| $x \in \overline{F} \iff \forall f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})\ f|_F = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

on en déduit ~~le théorème~~ une caractérisation des ~~espaces~~ s.e.v. de E partout dense :

$$\overline{F} = E \iff \forall f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})\ f|_F = 0 \Rightarrow f = 0$$

et un théorème :

Th | E = e.v.n. (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) F sev de E
| Si F est fermé et si E est reflexif, alors F est aussi un espace réflexif.

Voir le livre "optimisation" de Cea pour completer le cours sur Hahn-Banach, page 24 notamment : Espaces réflexifs.

Propriété importante des espaces réflexifs : (Th. 4.2 p24)

Th | Si V est un espace de Banach reflexif, alors de toute suite bornée de V on peut extraire une sous-suite faiblement convergente vers un élément de V (càd : "la boule unité d'un espace de Banach reflexif est faiblement compacte").

Théorème de Runge :

Th | Soit K un compact simplement connexe du plan complexe, Ω un ouvert contenant K.
Alors, pour toute fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ il existe une suite de polynôme P_n convergeant vers f uniformément sur K.

(VOIR : Prob. analyse XII 19 p 304 B.)

$X = \mathcal{C}(K) = \{$fcts conti. sur $K\}$ muni de $\| \ \|_\infty$.

$F = \{$fcts polynomiales de K vers $\mathbb{C}\}$

Soit f ~~holomorphe~~ $\in C^\omega(\Omega) = \{$fcts holom. sur $\Omega\} \subset X$

$f \in \overline{F}$ ssi toute forme linéaire s'annulant sur F s'annule sur f (cf. prop. précédente). Or on connait la forme de ces formes linéaires :

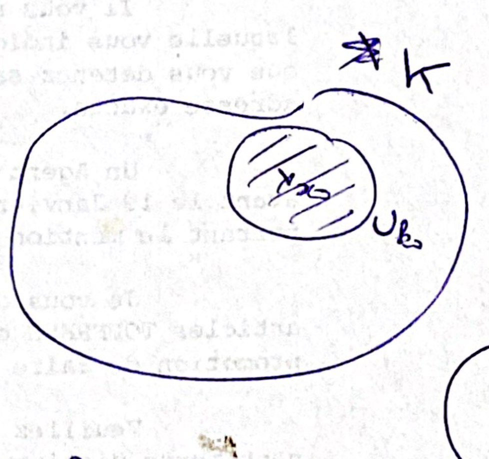
$\Lambda \in \mathcal{L}(X, \mathbb{C}) \iff \exists !$ mesure μ, de Borel, satisfaisant aux ~~hyp.~~ conc. du théorème de représentation de Riesz / $\Lambda(f) = \int_K f \, d\mu \quad \forall f \in X$

Tout revient donc à montrer que, pour une mesure μ de Borel quelconque

$$\int_K P \, d\mu = 0 \quad \forall P \text{ polynôme}$$
$$\Downarrow$$
$$\int_K f \, d\mu = 0 \quad \text{où } f \text{ est holomorphe sur } \Omega.$$

localement, $f(z) = \sum_{i \geq 0} a_i (z - z_0)^i$ sur U_{k_0}

on recouvre par un nbre fini d'ouvert $(U_k)_{k=1,\dots,n}$.



sur U_{k_0} • $f_i(z) = \sum_{i' \geq 0}^{i'=i} a_{i'} (z - z_0)^{i'}$ est continue sur $\overline{U_{k_0}}$, donc intégrable sur U_{k_0}

• $\lim f_i = f$ simpl. sur U_{k_0}

• $|f_i| \leq g : U_{k_0} \to \mathbb{C} \quad g(z)$

Théorème de Stone - Weierstrass

Rappels

On dit que $(A,+,.,\times)$ est une algèbre sur le corps K si

* $(A,+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur K
* $(A,+,\times)$ est un anneau
* $\forall \lambda\in K \ \forall x,y\in A \quad \lambda.(f\times g) = (\lambda f)\times g = f\times(\lambda g)$

Def | A est une algèbre normée si c'est une algèbre et si

α) $(A,+,.)$ = e.v. normé

β) $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ et $\|Id\| = 1$

Def | Une algèbre de Banach est une algèbre normée complète.

Exemples :

1. Soit E un e.v.n et $A = \mathcal{L}(E)$. $\forall u\in\mathcal{L}(E) \quad \|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$

Alors $\|u\circ v\| \leq \|u\|\|v\|$ et $\|Id\| = 1$.

De plus $(\mathcal{L}(E), \|\ \|)$ est complet. C'est donc une algèbre de Banach

2. $A = C_b(E,\mathbb{R})$ = {applications continues et bornées}

On pose $\|u\|_\infty = \sup_E |u(x)|$. C'est une norme sur A, et $(A, \|\ \|_\infty)$ est une algèbre de Banach.

Pro | Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée. Si $A \subset \mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{A}$, $\bar{A} \subset \mathcal{A}$ est aussi une sous-algèbre (sur le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

preuve : on sait que A sev de $\mathcal{A} \Rightarrow \overline{A}$ sev de $\mathcal{A}$. Reste à montrer que l'application $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ vérifie $\varphi(\overline{A \times A}) \subset \overline{A}$.

$$(a, b) \longmapsto ab$$

φ est bilinéaire, continue car $\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$. Donc :

$$\varphi(\overline{A \times A}) \subset \overline{\varphi(A \times A)} \subset \overline{A} \quad \text{(car } A \text{ ss algèbre)}$$

CQFD

Théorème de Stone-Weierstrass

1°/ Forme réelle

Th | Soit E un espace topologique compact. Si A est une sous-algèbre de $\mathscr{C}(E, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x, y \in E \;\; x \neq y \qquad \forall a, b \in \mathbb{R} \qquad \exists f \in A \, / \, \begin{cases} f(x) = a \\ f(y) = b \end{cases} \qquad (P)$$

Alors $\overline{A} = \mathscr{C}(E, \mathbb{R})$

(muni de la norme de la convergence uniforme)

Co | Si A contient les constantes et sépare les points de E (c.à.d : $\forall x, y \in E \;\; x \neq y \;\; \exists f \in A \, / \, f(x) \neq f(y)$) alors A vérifie la propriété (P) et donc $\overline{A} = \mathscr{C}(E, \mathbb{R})$

preuve du corollaire :

Soit $g(z) = \alpha f(z) + \beta$ où $f \in A$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Il est clair que $g \in A$ (car $\alpha f \in A$ et $\beta \in A$)

et : pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $x, y \in E$ $(x \neq y)$ on a :

$$\begin{cases} g(x) = \alpha f(x) + \beta = a \\ g(y) = \alpha f(y) + \beta = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{a - b}{f(x) - f(y)} \\ \beta = \dfrac{b f(x) - a f(y)}{f(x) - f(y)} \end{cases}$$

(NB : $f(x) \neq f(y)$ pour f convenable).

CQFD

Soit E un compact de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$, A = algèbre des polynômes sur E. A contient les constantes et sépare les points de E, d'où le :

Co | Toute fonction continue sur un compact de $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles, est limite uniforme d'une suite de polynômes réels.

Démonstration du théorème.

1re étape : On montre qu'il existe une suite de polynômes réels P_n qui dans $[0,1]$ est croissante et converge uniformément vers $\sqrt{t}$

On prend $P_1 = 0$ et $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n^2(t))$ (1)
Cette suite convient.
Si $\underbrace{P_n(t) \leq \sqrt{t}}_{\text{montrons le :}}$ alors $P_{n+1} \geq P_n$

$n=1$ vrai
$n>1$ Si $P_n(t) \leq \sqrt{t}$, alors :

$$\sqrt{t} - P_{n+1}(t) = \sqrt{t} - P_n(t) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} - P_n(t)\right)\left(\sqrt{t} + P_n(t)\right)$$
$$= (\sqrt{t} - P_n)(t))\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}(\underbrace{\sqrt{t} + P_n(t)}_{\leq 2\sqrt{t}})\right)}_{\geq 1-\sqrt{t} \geq 0}$$
$$\geq \underbrace{(\sqrt{t} - P_n(t))}_{\geq 0}\underbrace{(1-\sqrt{t})}_{\geq 0} \quad \text{car } 0 \leq t \leq 1$$

On se met en position d'appliquer le lemme de Dini. Pour celà, on montre la convergence ponctuelle.
t fixé : $(P_n(t))_n$ est suite croissante de $[0, \sqrt{t}]$

Donc $(P_n(t))_n$ bornée, donc $\exists f(t) \in [0, \sqrt{t}]$ /
$\lim_{+\infty} P_n(t) = f(t)$. Montrons que justement $f(t) = \sqrt{t}$.
Pour cela, on passe à la limite dans (1) :

$$f(t) = f(t) + \frac{1}{2}(t - f^2(t)) \Rightarrow f(t) = \sqrt{t}$$

Conclusion : $(P_n)_n$ suite croissante de fonctions continues de $[0,1]$ qui converge simplement vers $f(t) = \sqrt{t}$.
Dini $\Rightarrow$ la convergence est uniforme.

Lemme de Dini (Rappel)
Soient C un e.t. compact, $(f_n)_n$ et $f : C \to \mathbb{R}$ continues. On suppose $|f_n(t) - f(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ en décroissant.
Alors :

$$f = \lim_{n\to+\infty} f_n \text{ au sens de la convergence \underline{uniforme}.}$$

2ᵉ étape : Montrons que $f \in A \Rightarrow |f| \in \bar{A}$
On suppose $f \neq 0$ (sinon trivial)
$\forall x \in E$, considérons $\frac{f^2(x)}{\|f\|_\infty^2} \in [0,1]$

et montrons que

$$\frac{|f|}{\|f\|_\infty} = \underbrace{\underbrace{\lim_{n\to\infty}}_{(\text{uniforme})} \underbrace{P_n\left(\frac{f^2}{\|f\|_\infty^2}\right)}_{\in A \text{ car } P_n(0)=0}}_{\in \bar{A}}$$

En effet, on a montré que $|\sqrt{t} - P_n(t)| \leq \varepsilon$ dès que $n \geq N$ $(\forall t \in [0,1])$. On prend $t = \frac{f^2(x)}{\|f\|_\infty^2}$

d'où

$$\left| \frac{|f(x)|}{\|f\|_\infty} - P_n\left(\frac{f^2(x)}{\|f\|_\infty^2}\right) \right| \leq \varepsilon \quad \text{dès que } n \geq N,\ \forall x \in E$$

donc $\dfrac{|f|}{\|f\|_\infty} = \lim_{n\to\infty} P_n\left(\dfrac{f^2}{\|f\|_\infty^2}\right)$ conv. uniforme (CQFD)

3° étape : Soient $f, g \in \bar{A}$. A-t-on $\text{Inf}(f,g)$ et $\text{Sup}(f,g) \in \bar{A}$?

On a : $\text{Inf}(f,g) = \frac{1}{2}(f+g - |f-g|)$

$\text{Sup}(f,g) = \frac{1}{2}(f+g + |f-g|)$

On applique la 2° étape au sous-algèbre $\bar{A}$.

4° étape : $\forall f \in \mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ $\forall x \in E$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists g \in \bar{A}$ tq :

$g(x) = f(x)$ et $f(y) \leq g(y) + \varepsilon$ $\forall y \in E$

(on encadrera ensuite f de l'autre côté)

f, x, ε sont fixés.

$\forall z \in E$ $\exists g_z \in A$ / $\begin{cases} g_z(x) = f(x) \\ g_z(z) = f(z) \end{cases}$ (cf (P))

$\Downarrow$

$\exists V(z)$ / $\forall y \in V(z)$ $f(y) \leq g_z(y) + \varepsilon$

(car $|f - g_z| = 0$ en z et bornée par ε sur un voisinage de z)

On a donc la propriété localement.

Or E est compact, donc $E = \bigcup_{i=1}^{n} V(z_i)$. On prend $g = \text{Sup}_{1\leq i\leq n}(g_{z_i}) \in$

5° étape :

$\forall f \in \mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ $\forall \varepsilon > 0$ ~~$\forall z \in E$~~ ~~$\forall \varepsilon$~~ $\exists h \in \bar{A}$ tq :

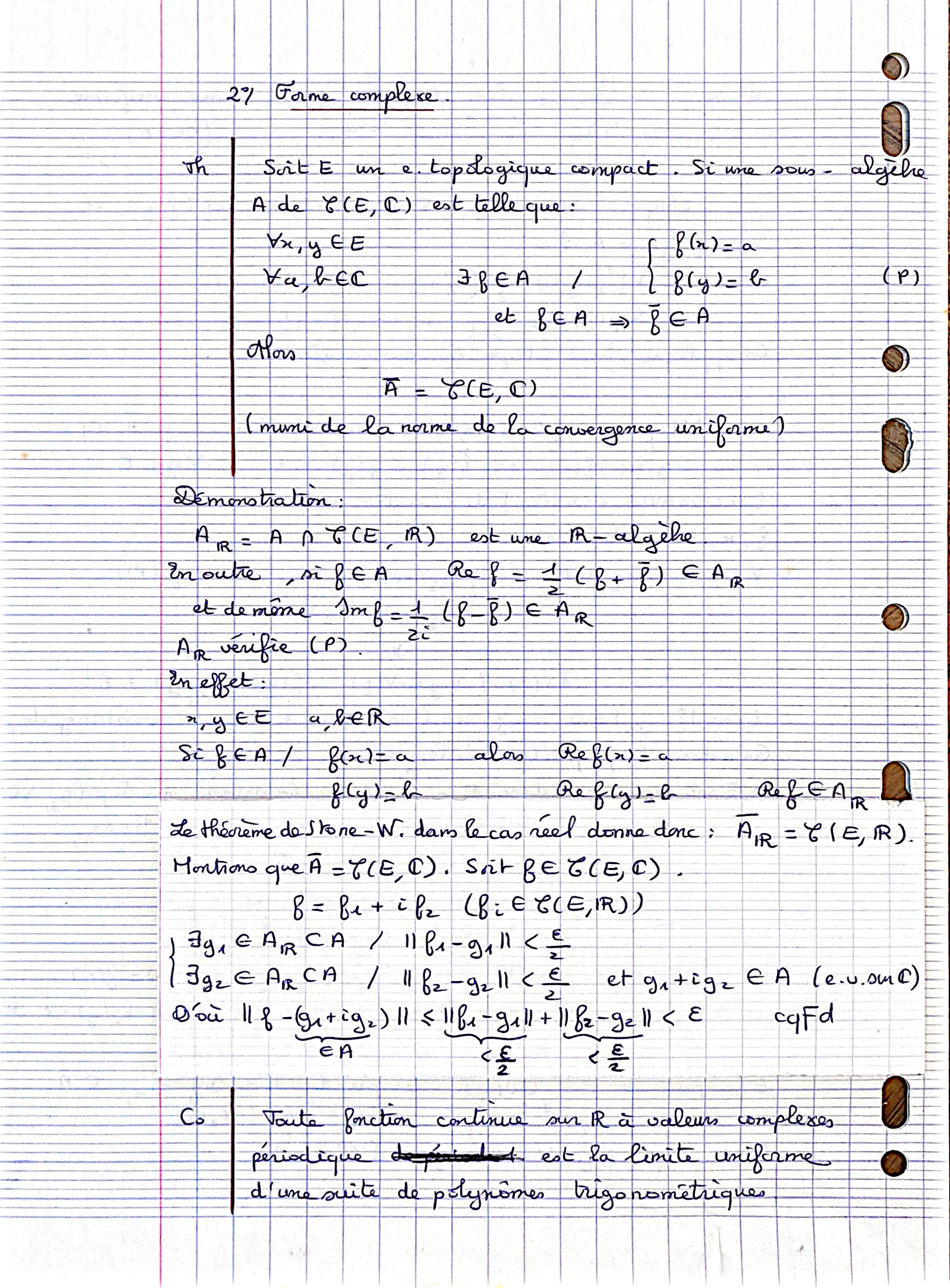
$\forall y \in E$ $h(y) - \varepsilon \leq f(y) \leq h(y) + \varepsilon$

En effet, le 4° dit que $\forall x \in E$ $\exists h_x \in \bar{A}$ / $\begin{cases} h_x(x) = f(x) \\ f(y) \leq h_x(y) + \varepsilon \quad \forall y \end{cases}$

$\forall x \in E$ $\exists U(x)$ / $\forall y \in U(x)$ $h_x(y) - \varepsilon \leq f(y)$

E compact $\Rightarrow E = \bigcup_{j=1}^{m} U(x_j)$. On prend $h = \text{Inf}_{1\leq j\leq m} h_{x_j} \in \bar{A}$

(en tant que inf d'un nbre fini d'él. de A)



2°) Forme complexe.

Th Soit E un e. topologique compact. Si une sous-algèbre A de $\mathcal{C}(E, \mathbb{C})$ est telle que :

$$\forall x, y \in E \quad \forall a, b \in \mathbb{C} \quad \exists f \in A \ / \ \begin{cases} f(x) = a \\ f(y) = b \end{cases} \qquad (P)$$

et $f \in A \Rightarrow \bar{f} \in A$

Alors

$$\bar{A} = \mathcal{C}(E, \mathbb{C})$$

(muni de la norme de la convergence uniforme)

Démonstration :

$A_{\mathbb{R}} = A \cap \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre

En outre, si $f \in A$ $\quad \mathrm{Re}\, f = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \in A_{\mathbb{R}}$

et de même $\mathrm{Im}\, f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}) \in A_{\mathbb{R}}$

$A_{\mathbb{R}}$ vérifie (P).

En effet :

$x, y \in E \quad a, b \in \mathbb{R}$

Si $f \in A$ / $f(x) = a$ $\quad$ alors $\mathrm{Re}\, f(x) = a$

$f(y) = b \qquad \mathrm{Re}\, f(y) = b \qquad \mathrm{Re}\, f \in A_{\mathbb{R}}$

Le théorème de Stone-W. dans le cas réel donne donc : $\bar{A}_{\mathbb{R}} = \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$.

Montrons que $\bar{A} = \mathcal{C}(E, \mathbb{C})$. Soit $f \in \mathcal{C}(E, \mathbb{C})$.

$$f = f_1 + i f_2 \quad (f_i \in \mathcal{C}(E, \mathbb{R}))$$

$$\begin{cases} \exists g_1 \in A_{\mathbb{R}} \subset A \ / \ \|f_1 - g_1\| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists g_2 \in A_{\mathbb{R}} \subset A \ / \ \|f_2 - g_2\| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

et $g_1 + i g_2 \in A$ (e.v. sur $\mathbb{C}$)

D'où $\|f - \underbrace{(g_1 + i g_2)}_{\in A}\| \leq \underbrace{\|f_1 - g_1\|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\|f_2 - g_2\|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$ $\qquad$ cqFd

Co Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes périodique ~~de période~~ est la limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

Co | Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, et périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques (càd, de polynômes du type : $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\omega k x}$.

Démonstration : Nous allons passer par l'intermédiaire du cercle unité de $\mathbb{C}$
$\mathcal{U} = \{z \,/\, |z| = 1\}$

On a : $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f(x)| = \sup_{[0,T]} |f(x)|$

A toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ périodique et continue, on fait correspondre une fonction $\tilde{f} : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$, continue sur le compact $\mathcal{U}$, et définie par :

$$\tilde{f}(e^{i\theta}) = f(\theta) \quad \forall e^{i\theta} \in \mathcal{U} \quad \text{, et inversement.}$$

Notons $X = \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fcts continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, et T-périodique.

Notons : $E = \{f : \mathcal{U} \to \mathbb{C} \,/\, f \text{ continue sur } \mathcal{U} = \{|z| = 1\}\}$ et A l'ensemble des polynômes trigonométriques sur $\mathcal{U}$, càd des applications $e^{i\theta} \mapsto \sum_{-n}^{n} c_k e^{ik\omega\theta}$ où $c_k \in \mathbb{C}$.
Il est clair que E est une algèbre de Banach pour $\| \|_\infty$, et que A est une sous-algèbre ~~de Banach~~ de E. De plus, si $g \in A$, $\bar{g} \in A$. Nous sommes prêts de montrer que :

(1) « <u>A est dense dans E pour $\| \|_\infty$.</u> »

Il suffit de constater que A contient les constantes et sépare les points (cf. $e^{i\theta_1} \neq e^{i\theta_2}$ donne, par $e^{i\omega\theta}$, $e^{i\omega\theta_1} \neq e^{i\omega\theta_2}$) pour appliquer le théorème de Stone-Weierstrass à A sous-algèbre de l'algèbre normé $\mathcal{C}(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ où $\mathcal{U}$ est un compact.

~~(2)~~

Montrons alors le corollaire en notant $\hat{A}$ l'ensemble des polynômes trigonométriques sur $\mathbb{R}$, càd l'ensemble des fonctions $x \mapsto \sum_{-n}^{n} c_k e^{i\omega k x}$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

$$\forall f \in X \qquad \exists!\, \tilde{f} \in E \,/\, \|\tilde{f}\|_\infty = \sup_{\mathcal{U}} |f(e^{i\theta})| = \sup_{[0,T]} |f(\theta)| = \|f\|_\infty$$

et d'après (1) : $\exists \tilde{P} \in A \,/\, \|\tilde{f} - \tilde{P}\|_\infty < \varepsilon$

En remarquant que $\tilde{P} = \sum_{-n}^{n} c_k e^{ik\omega\theta}$ est associé à $P = \sum_{-n}^{n} c_k e^{ik\omega x}$ et que $\tilde{f} - \tilde{P} = \widetilde{f - P}$, on obtient :

$$\exists P \in \hat{A} \,/\, \|\widetilde{f - P}\|_\infty < \varepsilon \iff \|f - P\|_\infty < \varepsilon.$$

CQFD

Espaces de Hilbert

Formes hermitiennes ; Produit scalaire hermitien

1°/ Formes hermitiennes.

Def Soit E un e.v. sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
$f : E \times E \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est dite "forme hermitienne sur E" si elle vérifie :

a) $\forall y \in E \quad x \mapsto f(x,y)$ est linéaire

b) $\forall x, y \in E \quad f(x,y) = \overline{f(y,x)}$

Sur $\mathbb{R}$, f est une forme bilinéaire symétrique.
Sur $\mathbb{C}$, f est une forme sesquilinéaire ($\frac{3}{4}$) à symétrie hermitienne.

$$\begin{cases} f(x+x',y) = f(x,y)+f(x',y) \\ f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y) \\ f(x,y+y') = f(x,y)+f(x,y') \\ f(x,\lambda y) = \bar{\lambda} f(x,y) \end{cases}$$

$f(x,y) = \overline{f(y,x)}$

Exemples :

1) Dans $\mathbb{C}^n$, $f(x,y) = {}^t x H \bar{y}$ où H est une matrice hermitienne, c.à.d vérifiant ${}^t\bar{H} = H$. On remarque que
$$H = (f(e_i, e_j))_{i,j}$$

2) $\ell^2_{\mathbb{C}} = \{ (x_1, \dots, x_k, \dots) \ / \ x_k \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{k \geq 1} |x_k|^2 < \infty \}$

$\ell^2_{\mathbb{C}}$ est un espace vectoriel, et $f(x,y) = \sum_{k\geq 1} x_k \bar{y}_k$, quantité qui est finie grâce à l'inégalité de Hölder, définit bien une forme hermitienne.

3) $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ où $I = [0,1]$; considérons
$$f(u,v) = \int_I u(t)\, \bar{v}(t)\, dt$$

Orthogonalité

Def | x et y sont dits orthogonaux pour f si $f(x,y)=0$

Def | $x\in E$ est dit vecteur "isotrope" pour f si $f(x,x)=0$

Pour tout $A\subset E$ on pose $A^{\perp}=\{x\in E \,/\, f(x,y)=0 \;\; \forall y\in A\}$.
$A^{\perp}$ est appelé le sous-espace orthogonal à A.

Def | f est dite "non dégénérée" si l'orthogonal de E est réduit à vecteur nul, c.à.d si $E^{\perp}=\{0\}$

NB : Si $E=\mathbb{C}^n$ (dim finie), cela signifie que H est inversible.

Def | f est dite "définie" si l'implication :

$$f(x,x)=0 \Rightarrow x=0$$

a lieu.

Pro | Une forme hermitienne définie est nécessairement non dégénérée.

2°/ Formes hermitiennes positives.

Def | Une forme hermitienne est dite positive si

$$\forall x\in E \qquad f(x,x)\geq 0$$

Pro | Si f est une forme hermitienne positive, alors

$$f \text{ définie} \Leftrightarrow f \text{ non dégénérée}$$

Cette proposition est un corollaire de la précieuse inégalité suivante connue sous le nom de "inégalité de Cauchy-Schwarz"

Th | Si f est une forme hermitienne positive :
$\forall x, y \in E \qquad |f(x,y)|^2 \leq f(x,x)\, f(y,y)$

preuve :
$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad f(x+\lambda y, x+\lambda y) \geq 0$
d'où $\quad \lambda\bar{\lambda} f(y,y) + \lambda f(y,x) + \bar{\lambda} f(x,y) + f(x,x) \geq 0$
On a $f(x,y) = \rho e^{i\theta}$. Prenons $\lambda = r e^{i\theta}$, alors :
$$r^2 f(y,y) + 2 r \rho + f(x,x) \geq 0 \qquad (1)$$
C'est un trinôme réel dont le coefficient du terme de plus haut degré est $f(y,y) \geq 0$.
Si $f(y,y) = 0$, $(1) \Leftrightarrow \quad 2 r\rho + f(x,x) \geq 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}_+$
donc $\rho = 0$ et l'on a bien $|f(x,y)|^2 \leq f(x,x) . 0$
Si $f(y,y) > 0$, le trinôme gardera constamment le signe positif ssi $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow \rho^2 - f(x,x) f(y,y) \leq 0$
CQFD

Montrons la proposition : Si f est positive
f non dégénérée $\Rightarrow f$ ~~positive~~ définie
En effet, $f(x,x) = 0 \Rightarrow \forall y \in E \quad |f(x,y)|^2 \leq 0$
donc $\forall y \in E \quad f(x,y) = 0 \Rightarrow x \in E^{\perp} \Rightarrow x = 0$
CQFD

Co | (Inégalité de Minkowski)
Soit f une forme hermitienne positive :
$$\sqrt{f(x+y, x+y)} \leq \sqrt{f(x,x)} + \sqrt{f(y,y)}$$

preuve : $f(x+y, x+y) = f(x,x) + 2 \operatorname{Re} f(x,y) + f(y,y)$

d'où $f(x+y, x+y) \leq f(x,x) + 2\,|f(x,y)| + f(y,y)$

$$\leq f(x,x) + 2\sqrt{f(x,x)}\sqrt{f(y,y)} + f(y,y)$$

$$\leq \left(\sqrt{f(x,x)} + \sqrt{f(y,y)}\right)^2$$

oui

3°/ Produit scalaire hermitien

Def | Un <u>produit scalaire hermitien</u> est une forme hermitienne non dégénérée positive sur E.
Un <u>espace vectoriel hermitien</u> (on dit encore : <u>préhilbertien</u>) est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien.

La notion d'espace vectoriel hermitien généralise la notion d'e.v. euclidien où E était un e.v. sur ℝ. Ainsi :

e.v. euclidien (ℝ) = e.v. muni d'un produit scalaire euclidien
(forme bilinéaire symétrique définie positive)

e.v. hermitien (ℂ) = e.v. muni d'un produit scalaire hermitien
(forme hermitienne définie positive)

On notera $f(x,y) = \langle x | y \rangle$ le produit scalaire sur E.

Pro | Un espace préhilbertien est un e.v. normé pour la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$

En effet, $\|x\| = 0 \Rightarrow \langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x | \lambda x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x | x \rangle} = |\lambda|\,\|x\|$$

et l'inégalité triangulaire n'est autre que l'in. de Minkowski.

4°/ Espace de Hilbert.

Def Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien qui est complet pour la norme issue du produit scalaire.

(C'est donc un Banach)

ex : $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ n'est pas un Hilbert.

Dans notre exposé, on choisit cette définition :

Définition : $u : E \to E'$ est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens si
a) c'est un isomorphisme d'e.v.
b) $\forall x, y \in E \quad \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$

Espaces préhilbertiens (ou hermitiens) : Théorème de projection de F. Riesz

1°/ Identités remarquables.

* Identité de Pythagore : $\langle x | y \rangle = 0 \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
* Identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Cela provient de :

$$\begin{cases} \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x | y \rangle + \langle y | x \rangle \\ \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x | y \rangle - \langle y | x \rangle \end{cases}$$

* Dans $\mathbb{R}$: $\langle x | y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

Dans $\mathbb{C}$:

$$\langle x | y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$$

2°/ Théorème de Projection

E désigne un espace préhilbertien.

Pro | Soit $A \subset E$ convexe et complet, et $x \in E$
Alors :
$\exists ! \, y \in A \;/\; \|x-y\| = d(x,A)$
y est appelé "projection de x sur A", et l'on note
$P_A(x) = y$

x, δ, y

preuve : $\delta = d(x,A)$

$\exists (y_n) \in A \;/\; \lim\limits_{n\to+\infty} \|x-y_n\| = \delta$

Montrons que (y_n) est une suite de Cauchy de A : l'inégalité du parallélogramme donne :

$$\|y_n-y_m\|^2 + \|2x-(y_n+y_m)\|^2 = 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|y_n-y_m\|^2 = 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 - 4\underbrace{\Big\|x - \underbrace{\frac{y_n+y_m}{2}}_{\in A}\Big\|^2}_{\geq \delta^2}$$

Or $m \geq n > N \Rightarrow \begin{cases} \|x-y_n\|^2 \leq \delta^2+\varepsilon^2 \\ \|x-y_m\|^2 \leq \delta^2+\varepsilon^2 \end{cases}$

D'où :

$m \geq n > N \Rightarrow \|y_n-y_m\|^2 \leq 2(\delta^2+\varepsilon^2) + 2(\delta^2+\varepsilon^2) - 4\delta^2$

$\Rightarrow \|y_n-y_m\| \leq 2\varepsilon$

A étant complet, on a $\lim\limits_{+\infty} y_n = y \in A$ et :

$$\|x-y_n\| \to \|x-y\| \quad (n\to+\infty)$$

or $\|x-y_n\| \to \delta$ donc $\delta = \|x-y\|$ avec $y \in A$.

CQFD

Unicité ?

Si y et $y' \in A$ vérifient $\|x-y\| = \|x-y'\| = \delta$, alors :

$$2\|x-y\|^2 + 2\|x-y'\|^2 = \|y-y'\|^2 + \|2x-(y+y')\|^2$$

donc :

$$4\delta^2 = \|y-y'\|^2 + \underbrace{4\left\|x-\frac{y+y'}{2}\right\|^2}_{\geq 4\delta^2} \Rightarrow \|y-y'\|=0$$

$$\Rightarrow y = y' \quad \text{oui.}$$

Théorème de projection de F. Riesz.

Th Soient F un sev complet (donc de Hilbert) de E, et $x \in E$. Alors :

1) Il existe un et un seul élément $y \in F$ tel que $x - y \perp F$. On pose $y = P_F(x)$ (cf. Prop précédente)
2) $P_F : E \to F$ est linéaire continue
3) $E = F \oplus F^\perp$ et de plus : $(F^\perp)^\perp = F$

×x

y

F s.e.v.

preuve :

1) Unicité :

Si y et $y' \in F$ vérifient $\begin{cases} \langle x-y \mid z\rangle = 0 \\ \langle x-y' \mid z\rangle = 0 \end{cases} \quad \forall z \in F$

alors $\langle \underbrace{y-y'}_{\in F} \mid z\rangle = 0 \quad \forall z \in F$

$\Updownarrow$ (dans F préhilbertien)

$y - y' = 0$

Existence : La proposition précédente appliquée avec F sev complet (et convexe) donne l'existence de $y \in F$ tel que

$$\|x-y\| = d(x, A).$$

Montrons que $x - y \perp F$.

$\forall z \in F \quad y + \lambda z \in F \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Alors : $\|x-(y+\lambda z)\|^2 \geq d(x,F)^2 = \delta^2$

Comme $\|x-(y+\lambda z)\|^2 = \langle x-y-\lambda z \mid x-y-\lambda z\rangle$

$$= \underbrace{\|x-y\|^2}_{=\delta^2} - 2\lambda \,\mathrm{Re}(\langle x-y|z\rangle) + \lambda^2 \|z\|^2$$

donc :

$$\|z\|^2\lambda^2 - 2\lambda\,\mathrm{Re}(\langle x-y|z\rangle) \geq 0 \qquad ~~\forall\lambda>0~~ \ (\lambda \in \mathbb{R})$$

donc $\forall z \in F$ ~~$z\neq 0$~~ $\mathrm{Re}(\langle x-y|z\rangle) = 0$

Par le passage $z \mapsto iz$ on obtient :

$$\mathrm{Re}(\langle x-y|iz\rangle) = 0 = \mathrm{Im}\,\langle x-y|z\rangle \quad \forall z \in F$$

D'où $\langle x-y|z\rangle = 0 \quad \forall z \in F$, ce qui prouve bien que $x-y \perp F$

2) et 3)

P_F est linéaire.

$$\forall x \in E \qquad x = \underbrace{P_F(x)}_{\in F} + \underbrace{(x - P_F(x))}_{\in F^\perp}$$

donc $E = F + F^\perp$. En fait $E = F \oplus F^\perp$ car le seul vecteur isotrope de E est $\vec{0}$. (E = préhilbertien)

D'après Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2 \Rightarrow \|P_F(x)\| \leq \|x\|$$
$$\Rightarrow \|P_F\| \leq 1$$

Si $y \in F\setminus\{0\}$ $\quad P_F(y) = y \Rightarrow \|P_F\| = 1$

Montrons enfin que $(F^\perp)^\perp = F$: On a toujours $F \subset (F^\perp)^\perp$.
Inversement, soit $x \in (F^\perp)^\perp$, alors $x - P_F(x) \in F^\perp$
Donc $x - P_F(x) \in F^\perp \cap (F^\perp)^\perp = \{0\} \Rightarrow x = P_F(x) \in F$

Espace de Hilbert : Théorème de dualité

lemme Soit $a \in E$ et $\varphi_a : E \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)
$$x \mapsto \langle x, a\rangle$$
φ_a est une forme linéaire continue sur E et $\|\varphi_a\| = \|a\|$

NB : E est un espace préhilbertien.
D'après Cauchy - Schwarz $\forall x \in E \quad |\langle x | a \rangle| \leq \|x\| \|a\|$
d'où $\|\varphi_a\| \leq \|a\|$
Comme $\varphi_a(a) = \|a\|^2$ on a $\|\varphi_a\| \geq \|a\|$
d'où $\|\varphi_a\| = \|a\|$.
CQFD

Théorème de dualité :

Th | Si E est un espace de Hilbert,

$$\varphi : E \longrightarrow E' \qquad a \longmapsto \varphi_a = \langle \cdot , a \rangle$$

est additive (linéaire si dans $\mathbb{R}$), conserve la norme et bijective. (dans $\mathbb{R}$, c'est une isométrie)

NB : Dans $\mathbb{R}$, φ est linéaire bijective, et conserve la norme. C'est donc une isométrie ("linéaire conserve la norme") surjective, ou encore un isomorphisme de E dans E' qui conserve la norme.

Dans $\mathbb{C}$, φ est anti-linéaire, càd que
$\forall a, b \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} \varphi_{a+b} = \varphi_a + \varphi_b \\ \varphi_{\lambda a} = \bar{\lambda} \varphi_a \end{cases}$$

Preuve :
* φ injective : $\varphi_a = 0 \iff \langle x, a \rangle = 0 \ \forall x \Rightarrow a = 0$
* φ surjective : Soit $f \in E'$;
Si $f = 0$, alors $\varphi_0 = 0$.
Si $f \neq 0$, soit H l'hyperplan fermé d'équation $f(x) = 0$
H est fermé dans E qui est de Hilbert. Donc H est complet et on peut appliquer le théorème de Riesz :

$E = H \oplus H^{\perp}$

Soit $b \in H^{\perp} \setminus \{0\}$. $\forall x \in H \quad \varphi_b(x) = \langle x, b \rangle = 0$

et $\varphi_b \neq 0$ (φ injective).

Donc $\varphi_b = 0$ est une autre équation de H. Donc

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \ / \quad f = \alpha \varphi_b = \varphi_{\bar{\alpha} b}$$

CQFD

Co | Tout espace de Hilbert est un espace normé réflexif

preuve :

$\forall u \in E'' \qquad \hat{u} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

$\qquad\qquad a \longmapsto \overline{u(\varphi_a)}$ est linéaire continue

D'après le théorème de dualité,

$$\exists x \in E \ / \quad \hat{u} = \varphi_x$$

Ainsi : $\quad \forall a \in E \qquad u(\varphi_a) = \overline{\hat{u}(a)} = \overline{\varphi_x(a)} = \varphi_a(x)$

(puisque $\varphi_x(a) = \langle x, a \rangle$)

D'où :

$$u(\varphi_a) = \varphi_a(x) = \tilde{x}(\varphi_a) \qquad \forall a \in E$$

Comme $a \mapsto \varphi_a$ est surjective sur E', on a :

$$u = \tilde{x}$$

ce qui prouve que l'application $\quad E \to E''$

$$x \longmapsto \tilde{x} = \{ f \mapsto f(x) \}$$

est surjective.

CQFD

Formes hermitiennes dans un espace de dimension fini — Orthogonalité

I Matrice d'une forme hermitienne sur E×E

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et f une forme hermitienne de E×E. L'expression de f dans la base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est :

$$f(x,y)=f\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j\right)=\sum_{i,j}x_i\bar{y}_j\,f(e_i,e_j)={}^tXM\bar{Y}$$

où $M=(f(e_i,e_j))_{i,j}$

On dit que M est la matrice de la forme hermitienne f dans la base (e_i)

On détermine ainsi une application bijective

$$\Phi:\ \{\text{formes herm. de } E\}\longrightarrow Mat_{\mathbb{C}}(n\times n)$$
$$f\longmapsto (f(e_i,e_j))_{i,j}=M$$

Il est clair que Φ est un isomorphisme d'e.v. (ce qui montre, en passant, que l'ev. des formes hermitiennes sur E×E est de dimension n^2)

Def | Le rang de f est le rang de M : $\boxed{rg f \doteq rg M}$

Il convient de vérifier que le rang de f ne dépend pas de la base choisie : si $\mathcal{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$ est une autre base, en notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, on aura $\begin{cases}X=PX'\\Y=PY'\end{cases}$ et $f(X,Y)={}^tXM\bar{Y}={}^tX'\underbrace{{}^tPM\bar{P}}_{M'}\bar{Y}'$

d'où $\boxed{M'={}^tPM\bar{P}}$ et $rg M'=rg M$ (car P inversible)

II Orthogonalité par rapport à une forme hermitienne

[On suppose connu les définitions sur l'orthogonalité de 2 vecteurs suivant la forme hermitienne, ou bilinéaire symétrique, f, ou l'orthogonal d'un sous-ensemble $A\subset E$, orthogonal que l'on notera A^o. On sait ce qu'est une forme hermitienne "non dégénérée" ($\Leftrightarrow E^o=\{0\}$), ou "positive", ou "définie". Précisons enfin qu'un vecteur isotrope de E est un vecteur x qui vérifie $f(x,x)=0$.]

Def | Si $A\subset E$, l'orthogonal de A pour f est

$$A^o=\{x\in E\ /\ f(x,y)=0\quad \forall y\in A\}$$

Pro | A^o est un sev de E.

Pro | Si F est un sev de E, $(F^\circ)^\circ \supset F$ mais on n'a pas nécessairement l'égalité.

preuve :

- $\forall x \in F \quad \forall y \in F^\circ \quad f(x,y) = 0 \quad \Rightarrow x \in (F^\circ)^\circ \Rightarrow F \subset (F^\circ)^\circ$.
- contre-exemple :

1°/ Cas d'une forme hermitienne non dégénérée.

Donnons un théorème pratique qui caractérise les formes hermitiennes non dégénérées en dimension finie. Notons $\varphi : E \longrightarrow E'$
$$a \longmapsto \varphi_a = f(\cdot, a)$$

Th | $\begin{cases} E = \text{ev de dim finie sur } \mathbb{C} \text{ (ou } \mathbb{R}) \\ f = \text{forme hermitienne sur } E \times E \text{, de matrice } M \text{ dans la base } (e_1, \dots, e_n) \end{cases}$

$\sim$:
1) f non dégénérée
2) $\varphi : E \to E'$ est une bijection antilinéaire
3) $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} M = \dim E$

2) $\Leftrightarrow$ 3). Pour le voir, on montre que la matrice de φ dans les bases $(e_i)_i$ et $(e_i^*)_i$ (base duale) est exactement la matrice M de f dans $(e_i)_i$.

En effet : $\varphi_{e_j}(x) = f(x, e_j) = f\left(\sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i, e_j\right) = \sum_{i=1}^n f(e_i, e_j) e_i^*(x) \quad \forall x$

d'où $\varphi_{e_j} = \sum_{i=1}^n f(e_i, e_j)\, e_i^* \Rightarrow \underset{(e_i)(e_i^*)}{\operatorname{Mat}}(\varphi) = \underset{(e_i)}{\operatorname{Mat}}(f)$,

1) $\Rightarrow$ 2) On sait que $\dim E' = \dim E$. Il suffit de voir que
$f(x,a) = 0 \quad \forall x \in E \Rightarrow a = 0$ pour constater que φ est injective, et par suite bijective.

2) $\Rightarrow$ 1) Comme φ est bijective, $f(x,a) = 0 \quad \forall x \in E \Rightarrow a = 0$ donc $E^\circ = \{0\}$ et f est bien non dégénérée.

CQFD

Définition : La famille de vecteurs $(e_i)_i$ est dite orthogonale (resp. orthonormale) pour la forme hermitienne f si $f(e_i, e_j) = 0 \quad \forall i \neq j$ (resp. $f(e_i, e_j) = \delta_{ij}$).

Th | Soit E un ev de dimension finie sur $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$), et f une forme hermitienne.
Il existe toujours au moins une base orthogonale de E.

preuve : récurrence sur la dimension de l'espace.

* $\dim E = 1$ $\quad v \neq 0$ convient.

* Si c'est vrai pour $\dim E = n-1$, on prend E de dimension n. De 2 choses l'une :

α) Tous les vecteurs de E sont isotropes : alors toute base de E est orthogonale puisque $\forall x, y \in E$ $\; f(x,y) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ où $q(x) = b(x,x)$.

(*) correct. Sinon $\frac{1}{4}(\dots)$

β) Il existe au moins un vecteur non isotrope. Soit e_1 un tel vecteur : $f(e_1,e_1) \neq 0$. Soit $H = (e_1)^\circ = \{x \,/\, f(x,e_1) = 0\}$. C'est un hyperplan de E comme noyau de la forme linéaire non nulle $f(\cdot, e_1)$, et donc $\dim H = n-1$ (cf $E/_H \simeq \mathbb{R}$ e.v.)

On a : $\quad E = (e_1) \oplus \underset{\sim}{H}$

$\exists$ base orthogonale $(e_2, \dots, e_n)$ (cf. hyp. réc.)

et $(e_1, \dots, e_n)$ est bien une base orthogonale de E.

CQFD

Remarque : Dans une base orthogonale $(e_1, \dots, e_n)$ pour f, la matrice de f est diagonale

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ 0 & & \ddots \; \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha_k = f(e_k, e_k)$$

et $f(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \bar{y}_j \qquad q(x) = \sum \alpha_j |x_j|^2$

Pro | Si f est une forme hermitienne non dégénérée, alors

1) $\dim F + \dim F^\circ = n$

2) $F = (F^\circ)^\circ$

• (Attention : on n'a pas $F \oplus F^\circ = E$!)

preuve :

1) Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Considérons $\Psi : E \longrightarrow \mathbb{C}^p$, $x \longmapsto \begin{pmatrix} f(x,e_1) \\ \vdots \\ f(x,e_p) \end{pmatrix}$. C'est une application linéaire continue de noyau $\operatorname{Ker}\Psi = F^\circ$. D'où : $\dim F^\circ = \dim E - \dim \operatorname{Im}$

Mais Ψ est surjective parce que f est non dégénérée (En effet, si $\sum \lambda_i f(\cdot, e_i) = 0$, on a $\sum \lambda_i f(x, e_i) = 0$ $\forall i \; \forall x$ d'où $(f(e_j,e_i))_{j,i} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ car la matrice $(f(e_j,e_i))_{j,i}$ est la matrice de la bijection antilinéaire $x \mapsto f(\cdot, x)$, donc $\{f(\cdot,e_i) \in E' \,/\, i \in [1,p]\}$ indépendants d'où Ψ surj). Ccl : $n = \dim F + \dim F^\circ$

2) On sait que $F \subset (F^\circ)^\circ$. D'après le 1) :

$$\dim (F^\circ)^\circ = n - \dim F^\circ = n - (n - \dim F) = \dim F$$

d'où $F = (F^\circ)^\circ$

(• Contre-exemple : $\mathbb{R}^4$; $f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$ est non dégénérée.

Soit $z = (1, 0, 0, 1)$. Alors, en notant $F = \langle z \rangle$, on a $F \subset F^\circ \Rightarrow F \cap F^\circ \neq \emptyset$.)

2°/ Cas d'un produit scalaire

(hermitien ou euclidien)

Procédé d'orthonormalisation

Pro | E = espace vectoriel euclidien. On note $x.y$ le produit scalaire. Soit $(a_1, \dots, a_n)$ une base de E. On peut construire une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ telle que

* $\forall p \quad \langle (a_1, \dots, a_p) \rangle = \langle (e_1, \dots, e_p) \rangle$
* $e_p . a_p > 0$

preuve : on fait une construction récurrente.

- Prenons $e_1 = \alpha a_1$ tel que $\begin{cases} |\alpha| \, \|a_1\| = 1 \\ \alpha \, \|a_1\|^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{\|a_1\|}$

donc $e_1 = \dfrac{a_1}{\|a_1\|}$

- Supposons construits les $(e_1, \dots, e_p)$ premiers vecteurs. Construisons e_{p+1}.

Cherchons α, λ_i tels que $e_{p+1} = \alpha a_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$, de sorte que l'on ait déjà $\langle (e_1, \dots, e_{p+1}) \rangle = \langle (a_1, \dots, a_{p+1}) \rangle$.

$$e_{p+1} . e_j = 0 \quad \forall j \in [1, p] \Longrightarrow \alpha a_{p+1} . e_j + \lambda_j = 0 \Rightarrow \lambda_j = -\alpha \, a_{p+1} . e_j .$$

D'où $e_{p+1} = \alpha \left[a_{p+1} - \sum_{j=1}^{p} (a_{p+1} . e_j) e_j \right]$. La condition $e_{p+1} . a_{p+1} > 0$, purement technique, nous donne l'unicité de e_{p+1} : on a $e_{p+1} = \alpha w_{p+1}$ où $w_{p+1} \neq 0$, et l'on prend $\alpha = \pm \dfrac{1}{\|w_{p+1}\|}$ suivant le sgn de $e_{p+1} . a_{p+1}$.

CQFD

(NB : cette proposition n'est autre que le thé. de la "base orthonormale incomplète")

Pro | Soit E un e.v. euclidien de dimension finie, et F un sev de E. Alors $\boxed{F \oplus F^\circ = E}$.

preuve :

1-démonstration : F est un ev euclidien. D'après le procédé d'orth., il existe une base orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ de F que l'on peut compléter en une base $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormale de E (cf. procédé ci-dessus). Alors

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in F^\circ \iff \langle \sum x_i e_i, e_j \rangle = 0 \quad \forall j \in [1,p]$

$\iff x_i = 0 \quad \forall i \in [1,p]$

$\iff x = \sum_{p+1}^{n} x_i e_i$

D'où $F^\circ = \langle (e_{p+1}, \dots, e_n) \rangle \Rightarrow F \oplus F^\circ = E$

2-démonstration : On a vu que f non dégénérée $\Rightarrow \dim F^\circ = n - \dim F$. Comme, de plus $x \in F \cap F^\circ \Rightarrow f(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$, on aura bien $F \oplus F^\circ = E$
(f définie)

Bases hilbertiennes

I Systèmes totaux

On se place dans un e.v.n.

Def | Une partie A de E est dite "totale" si le sev engendré par A est partout dense.

Th | Soit E un evn.
S'il existe une suite totale, alors E est séparable.
Inversement, si E est séparable, alors il existe une suite totale formée de vecteurs linéairement indépendants.

- $\{a_1, \dots, a_n, \dots\} = A$. Posons $D = \{\sum_{i=1}^{n} q_i a_i \ / \ n \in \mathbb{N} \ q_i \in \mathbb{Q} \ a_i \in A\}$. D est dénombrable et dense dans le sev engendré par A, qui n'est autre que E. Donc $\overline{D} = E$.
- Si E est séparable, il existe $D = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ tel que $\overline{D} = E$.

De 2 choses l'une : * Si $\dim E < \infty$, c'est fini
* Sinon, construisons la suite $(c_n)_n$ comme suit :

$c_1 = a_{i_1}$ où $i_1 = \inf\{i \in \mathbb{N} \ / \ a_i \neq 0\}$

$c_2 = a_{i_2}$ où $i_2 = \inf\{i \in \mathbb{N} \ / \ \{a_{i_1}, a_i\} \text{ libre}\}$

....

$c_n = a_{i_n}$ où $i_n = \inf\{i \in \mathbb{N} \ / \ \{a_{i_1}, \dots, a_{i_{n-1}}, a_i\} \text{ libre}\}$

La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite totale formée de vecteurs linéairement indépendants.

[Montrons qu'elle est totale : Soit $a_m \in D$ quelconque, $\exists ! k \ / \ i_k \leq m < i_{k+1}$ d'où $a_m = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_{i_j}$]

CQFD

Pro | Soit C un espace métrique compact.
Alors $\mathcal{C}(C, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}(C, \mathbb{C})$ sont séparables

(NB : ces espaces vect. sont munis de $\| \ \|_\infty$)

Preuve : Comme $\mathcal{C}(C, \mathbb{C}) \simeq \mathcal{C}(C, \mathbb{R}^2)$ en tant qu'espaces topologiques, on peut se borner à $\mathcal{C}(C, \mathbb{R})$.

C métrique compact $\Rightarrow$ précompact $\Rightarrow$ séparable.

Donc C métrique séparable $\Rightarrow \exists (U_n)_n$ base dénombrable d'ouverts de C.

Soit $g_n : C \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto d(x, C \setminus U_n)$. L'ensemble $\{g_{n_1}^{\alpha_1} \cdots g_{n_k}^{\alpha_k} \ / \alpha_i \in \mathbb{N}\} = D$ est dénombrable

et le sous-espace vect. de $\mathcal{C}(C,\mathbb{R})$ engendré par les $g_{n_1}^{\alpha_1} \dots g_{n_k}^{\alpha_k}$ est partout dense :
En effet, ce sev n'est autre que la sous-algèbre de $\mathcal{C}(C,\mathbb{R})$ engendrée par les g_n.
Comme C est compact, il suffit de montrer que cette sous-algèbre sépare les points (cf. Stone-Weierstrass) de C.

Si $x \neq y$ $(\in C)$ $\exists n$ / $x \in U_n$ et $y \notin U_n$ (car C est séparé)

Alors $\begin{cases} g_n(x) \neq 0 \\ g_n(y) = 0 \end{cases}$. Donc $\bar{A} = \mathcal{C}(C,\mathbb{R})$.

CQFD

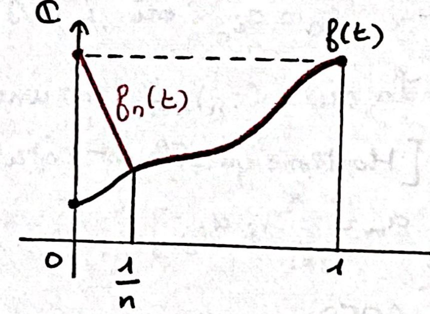
(NB : $A = \{$ss-algèbre engendrée par les $g_n\}$ contient les constantes

II Systèmes orthonormaux

Def | Soit E un préhilbertien. On dit qu'un système d'éléments $(a_i)_{i\in I}$ de E est un système orthogonal si $a_n \neq 0$ et $\langle a_n, a_m\rangle = 0$ $\forall n \neq m$. On dit que c'est un système orthonormal si $\forall n,m$ $\langle a_n, a_m\rangle = \delta_{n,m}$

Exemple : Soit $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)\,\bar{g}(t)\,dt$
Le système $(\varphi_n)_n$ où $\varphi_n(t) = e^{i2\pi n t}$ est un système orthonormal total.
En effet :

* Si $n \neq m$ $\langle \varphi_n, \varphi_m\rangle = \int_0^1 e^{i2\pi(n-m)t}\,dt = \delta_{nm}$
* Si $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$, on peut construire une suite f_n de fonctions de $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$ telle que $f_n \xrightarrow{\|\,\|_2} f$ $(n \to +\infty)$ et $f_n(0) = f_n(1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$



Le Théorème de Stone-Weierstrass dit l'existence d'un polynôme trigonométrique $P = \sum \lambda_n \varphi_n$ tel que $\|f_n - P\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \|f_n - P\|_2 < \varepsilon$
Donc $\|f - P\|_2 < \varepsilon$ et $P = \sum \lambda_n \varphi_n \Rightarrow \langle(\varphi_n)_n\rangle$ dense dans $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$
cqfd

Remarque : $(\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I), \|\,\|_2)$ n'est pas complet.

III Bases hilbertiennes

1°/ Définition

Rappel de la définition d'une famille sommable de nombres complexes :

Definition : Une famille $(a_i)_{i\in I}$ de nombres complexes est "sommable" s'il existe $A\in\mathbb{C}$ tel que : $\forall \varepsilon>0 \quad \exists J_0$ fini $\subset I$ / $\forall J$ fini $J_0\subset J\subset I$ $\quad \left|A-\sum_{i\in J} a_i\right|<\varepsilon$

On note $A=\sum_{i\in I} a_i$ la somme d'une telle famille.

lemme : Soit E un espace préhilbertien. Soit $(a_i)_{i\in I}$ un système orthonormal de E, et $x\in E$. La famille $|\langle x,a_i\rangle|^2$ est sommable et

$$\sum_{i\in I}|\langle x,a_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \qquad \text{(inégalité de Bessel)}$$

preuve : tout revient à montrer que $\forall J$ finie $\sum_{i\in J}|\langle x,a_i\rangle|^2\leq\|x\|^2$. On a

$$\left(x-\sum_{i\in J}x_ia_i\right)^2=\|x\|^2+\left\langle\sum_J x_ia_i,\sum_J x_ia_i\right\rangle-\left\langle x,\sum_J x_ia_i\right\rangle-\left\langle\sum_J x_ia_i,x\right\rangle$$

(où $x_i=\langle x,a_i\rangle$)

compte tenu du fait que $(a_i)_I$ est orthonormal :

$$\left(x-\sum_{i\in J}x_ia_i\right)^2=\|x\|^2-\sum_J|x_i|^2\geq 0$$

CQFD

Montrons maintenant un théorème important :

Th | Soit E un espace préhilbertien, et soit $(a_i)_{i\in I}$ un système orthonormal de E. ~ entre :

1) La famille $(a_i)_{i\in I}$ est totale dans E

2) $\forall x,y\in E \qquad \langle x,y\rangle=\sum_{i\in I}\langle x,a_i\rangle\langle a_i,y\rangle$

3) $\forall x\in E \qquad \|x\|^2=\sum_{i\in I}|\langle x,a_i\rangle|^2$ (Relation de Parseval)

4) $\forall x\in E \qquad x=\sum_{i\in I}\langle x,a_i\rangle a_i$

(NB : Ce théorème montre l'importance des systèmes orthonormaux totaux dans un préhilbertien. Les formules 2) à 4) sont intéressantes car maniables)

démonstration :

1) ⇒ 2) $\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists J$ fini $\exists \alpha_i \ / \ y = \sum_{i \in J} \alpha_i a_i$ vérifie $\|x - y\| < \varepsilon$.

Donc, à fortiori la projection x' de x sur l'espace complet engendré par la famille finie $(a_i)_{i \in J}$ vérifie $\|x - x'\| < \varepsilon$. (1)

Or $x - \sum_{i \in J} x_i a_i$ est orthogonal à chacun des a_i $(i \in J)$, donc $x' = \sum_{i \in J} x_i a_i$

On a (1) $\Rightarrow 0 \leq (x - \sum_{i \in J} x_i a_i)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow 0 \leq \|x\|^2 - \sum_{i \in J} |x_i|^2 < \varepsilon^2$

$\Rightarrow \|x\|^2 - \sum_{i \in I} |x_i|^2 < \varepsilon^2 \quad \forall \varepsilon > 0$

d'où $\|x\|^2 \leq \sum_{i \in I} |x_i|^2$. Compte tenu de l'inégalité de Bessel, on obtient

$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |x_i|^2$ (2)

Soit x, y quelconques dans E. On note $\begin{cases} x_i = \langle x, a_i \rangle \\ y_i = \langle y, a_i \rangle \end{cases}$

On sait que $\sum |x_i|^2 < \infty$ et $\sum |y_i|^2 < \infty \Rightarrow \sum x_i \bar{y}_i < \infty$ (Holder)

On utilise la relation (2) ainsi que l'identité vraie dans tout préhilbertien :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$$

pour obtenir :

$$\langle x, y \rangle = \sum_i \frac{1}{4}\left(|x_i+y_i|^2 - |x_i-y_i|^2 + i|x_i+iy_i|^2 - i|x_i-iy_i|^2\right)$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} x_i \bar{y}_i$$

cqfd

2) ⇒ 3) trivial

3) ⇒ 4) $\|x\|^2 = \sum_I |\langle x, a_i \rangle|^2$ donc, par définition :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J_0$ fini $/ \begin{cases} J_0 \subset J \\ J \text{ fini} \end{cases} \Rightarrow \|x\|^2 - \sum_{i \in J} |x_i|^2 < \varepsilon^2$

or $\left(x - \sum_J x_i a_i\right)^2 = \|x\|^2 - \sum_{i \in J} |x_i|^2 < \varepsilon^2$

d'où $\left\|x - \sum_J x_i a_i\right\| < \varepsilon \quad \forall J \supset J_0$ J fini, ce qui prouve que $x = \sum_{i \in I} x_i a_i$

4) ⇒ 1) Si $x = \sum_{i \in I} x_i a_i$ où $x_i = \langle x, a_i \rangle$, alors :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J_0$ fini $/ \quad \|x - \underbrace{\sum_{i \in J_0} x_i a_i}_{\in \text{ sev engendré par } (a_i)_I}\| < \varepsilon \Rightarrow (a_i)_{i \in I}$ est total.

CQFD

Def | Soit E un préhilbertien. Une "base hilbertienne" de E est un système $(a_i)_{i\in I}$ orthonormal total.

Le théorème précédent montre l'utilité des bases hilbertiennes pour la représentation des éléments de E. Il est donc important de connaître des conditions suffisantes pour l'existence de telles bases :

2°/ Existence de bases hilbertiennes dans un Hilbert

Def | Soit E un espace préhilbertien. Un système orthonormal $(a_i)_{i\in I}$ de E est dit maximal si tout système orthonormal qui le contient lui est identique.

(c.à.d. si $(a_i)_{i\in I}$ est un élément maximal dans l'ensemble des systèmes orthonormaux de E munis de l'inclusion)

Pro | $(a_i)_{i\in I}$ est un syst. orthonormal maximal ssi c'est un système orthonormal qui vérifie l'implication : $\langle x, a_i\rangle = 0 \ \forall i \Rightarrow x = 0$

- Si $(a_i)_I$ est maximal, et si $\exists x \in E \ / \ \langle x, a_i\rangle = 0$ et $x \neq 0$, alors $(\{a_i\}_{i\in I}, \frac{x}{\|x\|})$ est un système qui contient $(a_i)_I$ strictement ! c'est absurde.
- Si $\langle x, a_i\rangle = 0 \ \forall i \Rightarrow x = 0$, $\forall x \in E$, soit $(a_i)_{i\in J} \supset (a_i)_{i\in I}$. Alors $\forall i_0 \in J\setminus I$ $\langle a_{i_0}, a_i\rangle = 0 \ \forall i \in I \Rightarrow a_{i_0} = 0$, donc $J\setminus I = \emptyset \Rightarrow I = J$ et $(a_i)_{i\in I}$ est maximal.

CQFD

Pro | Si E est un Hilbert, et si $(a_i)_{i\in I}$ est un système orthonormal de E,
$$(a_i)_{i\in I} \text{ orthonormal total} \iff (a_i)_{i\in I} \text{ orthonormal maximal}$$

(Remarque : c'est faux si E non complet, cf ex 197 p310 Choquet)

($\Rightarrow$) Soit $(a_i)_{i\in J}$ un système orthonormal qui contient $(a_i)_{i\in I}$. Si $I \subsetneq J$ on a $\exists i_0 \in J\setminus I$, et alors $a_{i_0} = \sum_{i\in I} \langle a_{i_0}, a_i\rangle a_i$ (cf. Th. 1°/) $\Rightarrow a_{i_0} = 0$, absurde ! donc $(a_i)_{i\in J} = (a_i)_{i\in I}$ et $(a_i)_{i\in I}$ est maximal

($\Leftarrow$) Soit L le sev engendré par $\{a_i, i\in I\}$. Si $\bar{L} \neq E$, il existerait $x \in E\setminus\bar{L}$ tel que $x \neq 0$ et $\langle x, a_i\rangle = 0 \ \forall i$ (cf. $\bar{L}$ fermé dans un Hilbert $\Rightarrow$ on peut définir la proj-orth. sur $\bar{L}$, et on aura $\bar{L} \oplus \bar{L}^\perp = E$ avec $\bar{L}^\perp \neq \{0\}$ car $\bar{L} \neq E$, cf. th. proj.)

Donc $\bar{L} = E$.

Th | Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne.
(Mieux : tout système orthonormal de E, fini ou infini, est contenu dans une base hilbertienne)

preuve : Grâce au Théorème de Zorn.

Soit $(a_i)_{i\in I} = \mathcal{S}$ un système orthonormal de E. Considérons $\mathcal{B} = \{S = \text{systèmes orthonormaux qui contiennent } \mathcal{S}\}$. On montre que $\mathcal{B}$ est inductif pour pouvoir appliquer le th. Zorn ;

$\mathcal{B}$ inductif $\Leftrightarrow$ Toute partie totalement ordonnée de $\mathcal{B}$ admet un majorant dans $\mathcal{B}$.

Soit $T \in \mathcal{B}$ tot. ord. Alors $\bigcup_{S\in T} S$ = syst. orth. qui contient $\mathcal{S}$, et c'est un majorant de T.

Ccl : Il existe un élément maximal $(e_i)_{i\in J} \in \mathcal{B}$. Il est maximal dans $(\mathcal{B}, \subset)$ donc il contient $\mathcal{S}$. On vérifie facilement qu'il est aussi maximal dans l'ens. des systèmes orthonormaux de E ordonnés par $\subset$. Donc (cf. Pro précédente) c'est une base hilbertienne.

CQFD

3°/ Existence de bases hilbertiennes dans un préhilbertien séparable

On sait qu'un préhilbertien séparable possède une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ totale formée de vecteurs lin. indépendants. Il est facile de construire une base hilbertienne à partir de cette suite, en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt :

lemme (orthonormalisation de Schmidt) :

Soit E un espace préhilbertien et $(a_n)_n$ une suite totale de vecteurs lin. indépendants. Notons V_n le sev engendré par $(a_0, \dots, a_n)$. Alors $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthogonale totale, où :

$$\begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_2 = p_{V_1^\perp}(a_2) = a_2 - p_{V_1}(a_2) \\ \dots \\ b_n = p_{V_{n-1}^\perp}(a_n) = a_n - p_{V_{n-1}}(a_n) \\ \dots \end{cases}$$

preuve :
On montre par récurrence que « $(b_1, \dots, b_n)$ est un système orthogonal qui engendre $V_n = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$ ».

• vrai pour $n=1$

• $n \Rightarrow n+1$ $b_{n+1} = a_{n+1} - p_{V_n}(a_{n+1}) = p_{V_n^\perp}(a_{n+1})$ est un vecteur orthogonal à $V_n = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ (hyp. réc.), donc $\langle b_{n+1}, b_i \rangle = 0 \quad \forall i \in [1, n]$

de plus, $a_{n+1} = b_{n+1} + \underbrace{p_{V_n}(a_{n+1})}_{\in V_n}$, donc $(b_1, \dots, b_{n+1})$ engendrent V_{n+1}.

CQFD

On en déduit le théorème :

Th | Tout espace préhilbertien séparable admet une base hilbertienne finie ou dénombrable.

Attention ! Une base hilbertienne n'est pas une base d'e.v. C'est un système libre, mais non générateur de E au sens classique (cà.d tel que $\forall x \in E \ \exists I_F$ fini $\exists \lambda_i \ (i \in I_F) \ / \ x = \sum_{I_F} \lambda_i x_i$) ne faisant intervenir que des combinaisons linéaires finies. C'est pour palier au manques de bases dans un hilbert quelconque de dimension ∞ qu'on définit les bases hilbertiennes.

4°/

Il est clair que tout préhilbertien de dimension finie est isomorphe à $\mathbb{C}^n$ ($n = \dim E$). En fait, il s'agit d'une isométrie si l'on muni $\mathbb{C}^n$ d'une norme convenable (la norme transportée). Comme $\mathbb{C}^n$ est complet (pour n'importe quelle norme, vu qu'elles sont toutes équivalentes), E le sera aussi : ce sera un hilbert.

La chose est moins évidente si la dimension de E n'est pas finie :

Th | Tout espace préhilbertien (resp. de hilbert) séparable de dimension ∞ est isomorphe à un sous-espace dense de ℓ^2 (resp. à ℓ^2)

Remarque : nous allons montrer l'existence d'une isométrie de E (resp. préh. sép. dim ∞) sur $A \subset \ell^2$ dense dans ℓ^2. On aura ce que l'on appelle parfois "un isomorphisme d'e.v. préhilbertiens. (Rappelons qu'un isomorphisme d'e.v. est un homéomorphisme linéaire, et qu'une isométrie d'e.v. est une application linéaire bijective qui conserve la norme)

Preuve : E possède une base hilbertienne $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dénombrable (cf. Th du 3°/)

Notons $F_n = (c_n)$ sev engendré par c_n.

On a : $F_n \perp F_m$ et $\overline{\oplus F_n} = E$.

Il est facile de définir une application linéaire de la façon suivante :

$$g : \oplus F_n \longrightarrow \ell^2$$
$$x_1 + \dots + x_k \longmapsto (x_1, \dots, x_k, 0, \dots) \in C_{00} \subset \ell^2$$

On a $\|g(x)\| = \|x\|$ $\forall x \in \oplus F_n$, et donc g est linéaire continue.
Le théorème de prolongement d'une application linéaire continue nous donne l'existence de $\bar{g} : \overline{\oplus F_n} = E \longrightarrow \ell^2$ linéaire continue

$$x \longmapsto \bar{g}(x)$$

telle que $\bar{g}|_{\oplus F_n} = g$.

On a $\|g(x)\| = \|x\|$ $\forall x \in \oplus F_n \Rightarrow \|\bar{g}(x)\| = \|x\|$ $\forall x \in E$

Donc $\bar{g}$ conserve la norme. $\bar{g}$ est donc une isométrie de E sur $\bar{g}(E) = A \subset \ell^2$.

* $\overline{C_{00}} = \ell^2$ d'où $\overline{C_{00}} = \overline{g(\oplus F_n)} \subset \overline{\bar{g}(E)} \subset \ell^2 \Rightarrow \overline{\bar{g}(E)} = \ell^2$ et A est dense dans ℓ^2.

* Si, de plus, E est complet, comme $\bar{g}$ est une isométrie, $\bar{g}(E) = A$ sera complet. A complet, partout dense dans l'hilbert ℓ^2 ne peut être que ℓ^2.

CQFD

Co | Soit E un hilbert ~~et (de di~~ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de E.
Pour toute suite $(x_i)_i$ d'éléments de $\mathbb{C}$ tels que $\sum_{i \geq 0} |x_i|^2 < \infty$ il existe un point $x \in E$ de coordonnées (x_i) dans la base hilbertienne (a_n), c.à.d tel que $x = \sum_{i \geq 0} x_i a_i$

IV Applications.

1°/ Séries de Fourier

Posons $E = \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) / f$ périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega} \}$

E est un espace préhilbertien pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t)\, \bar{g}(t)\, dt$$

mais E n'est pas complet (alors que $(L^2(X), \| \|_2)$ est un Banach !)

[En effet, prenons $f_n(t) = \text{Inf}\left(n, \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)$. on a $\|f_n - f_{n+p}\|^2 \leq \int_0^{\frac{1}{n^3}} t^{-\frac{2}{3}} dt \to 0$ $(n \to +\infty)$
donc (f_n) est de Cauchy, et pourtant, $\forall f \in E$, $\|f - f_n\|^2 \geq \int_{\frac{1}{n^3}}^1 |f(t) - t^{-\frac{1}{3}}|^2 dt$
en appliquant le lemme de Fatou pour $n \to +\infty$,

$$\|f - f_n\|^2 \geq \varliminf_n \int_{\frac{1}{n^3}}^1 |f(t) - t^{-\frac{1}{3}}|^2 dt \geq \int_0^1 |f(t) - t^{-\frac{1}{3}}|^2 dt > 0$$

(non bornée sur $]0,1]$. ($\exists$ int. compact / $| \,| > 0$))

donc f_n ne converge pas !]

Notons $\varphi_n : t \mapsto e^{in\omega t}$. $\varphi_n \in E$.

Pro | $E = \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

1) $\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E

2) $\forall f \in E \quad f = \sum_{n\geq 0} \langle f, \frac{\varphi_n}{\sqrt{T}} \rangle \frac{\varphi_n}{\sqrt{T}} = \frac{1}{T} \sum_{n\geq 0} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$

3) $\langle f, f \rangle = \frac{1}{T} \sum_{n\geq 0} |\langle x, \varphi_n \rangle|^2$ (Parseval)

Il suffit de montrer le 1) pour que les 2) et 3) en découlent.

$$\frac{1}{T}\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i\omega(n-m)t}\,dt = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ 1 \text{ si } n = m \end{cases}$$

Le système $\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\varphi_n\right)_n$ est donc orthonormal. Il est total (cf. démonstration au §2). Le théorème de Stone-Weierstrass nous a en effet montré l'existence d'un polynôme trigonométrique qui approche $f \in \mathcal{C}_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour $\| \; \|_\infty$, donc pour $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ puisque I est compact ($I = [0, T]$). cqfd

2°/ Polynômes orthonormaux

Def | Soit $I = [a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$. On appelle "poids sur I" une fonction $p : \mathring{I} \to \mathbb{R}_+^*$ continue, telle que $\forall n \geq 0 \quad \int_I |t|^n p(t)\,dt < \infty$

Posons $E_p = \{ f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C}) \,/\, \int_I |f(t)|^2 p(t)\,dt < \infty \} \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$. C'est un s.e.v. de $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ puisque :

$$\forall f, g \in E_p \quad |f+g|^2 = |f|^2 + |g|^2 + 2|fg| \leq 2(|f|^2 + |g|^2)$$

$\langle f, g \rangle = \int_I f(t)\overline{g(t)}\, p(t)\,dt$ est une forme hermitienne définie positive sur E_p (le montrer).

Ainsi, $(E_p, \langle , \rangle)$ est un préhilbertien. Le système $((t^n))_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de E_p est libre, et on peut donc appliquer à cette suite le procédé d'orthogonalisation de Schmidt.

Posons $a_n(t) = t^n$. Alors $\begin{cases} P_0 = a_0 \\ P_n = a_n - \text{proj}_{(a_0, \dots, a_{n-1})}(a_n) \end{cases}$

donc P_n est un polynôme unitaire de degré n.

Exemples classiques

intervalle I	poids sur I	les polynômes P_n s'appellent :
$I = [-1, 1]$	$p(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$ où $\alpha, \beta > -1$	polynômes de Jacobi
$I = [-1, 1]$	$p(t) = 1$	" de Legendre
$I = [-1, 1]$	$p(t) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-t)(1+t)}}$	" de Tschebyschef
$I = [0, \infty[$	$p(t) = e^{-t}$	" de Laguerre
$I =]-\infty, \infty[$	$p(t) = e^{-t^2}$	" de Hermite

Pro Si I est un intervalle compact, la suite $\left(\frac{P_n}{\|P_n\|}\right)_n$ des polynômes associés au poids p sur I est une base hilbertienne de l'espace préhilbertien E_p.

preuve : $\left(\frac{P_n}{\|P_n\|}\right)_n$ est une suite orthonormale. Elle est totale : soit $f \in E_p$ quelconque. $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ où I est compact. Le théorème de Stone-Weierstrass nous dit l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\|P - f\|_{\infty}^{I} < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ fixé). Alors $\|P - f\| = \int_I |P - f|^2(t)\, p(t)\, dt \leq \underbrace{\sup_I |p(t)|}_{<\infty} \operatorname{long}(I)\, \varepsilon$

(car p continue et I compact)

CQFD

Remarque : Si I n'est pas borné, il existe des poids p sur I pour lesquels la suite $\left(\frac{P_n}{\|P_n\|}\right)_n$ n'est pas totale. Néanmoins, on démontre que c'est encore vrai pour les polynômes de Laguerre et d'Hermite.

Propriétés générales des suites de polynômes orthogonaux.

Pro 1
1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n \perp P_k \quad \forall k \in [0, n-1]$
2) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n - tP_{n-1}$ est un polynôme de degré $\leq n-1$.
3) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \langle tP_{n-1}, P_n \rangle = \langle P_n, P_n \rangle$
4) $\forall f, g, h \in E_p \quad \langle fg, h \rangle = \langle fg\bar{h}, 1 \rangle = \langle f, \bar{g}h \rangle$

(trivial)

Pro 2 | Chaque polynôme P_n possède n racines réelles distinctes dans $\mathring{I}$.

preuve : $P_n \perp P_0 \Rightarrow \int_I P_n(t)\, p(t)\, dt = 0 \Rightarrow P_n$ s'annule au moins 1 fois dans $\mathring{I}$, en changeant de signe.

Si $(t_1, \dots, t_r)$ où $t_i < t_{i+1}$ est la suite des racines de P_n intérieures à I, on a $r = n$; sinon $Q(t) = (t-t_1)(t-t_2) \dots (t-t_r)$ est un polynôme dans V_{n-1} et $Q(t) P_n(t)$ a un signe constant sur $I \Rightarrow \langle P_n, Q \rangle \neq 0$ absurde car $Q \in V_{n-1}$!

Pro 3 | (Relation de récurrence)
Il existe 2 suites de nombres réels λ_n, μ_n avec $\mu_n > 0$, tels que

$$\forall n \geq 2 \qquad P_n = (t + \lambda_n) P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}$$

preuve : $\deg(P_n - tP_{n-1}) \leq n-1 \Rightarrow P_n - tP_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i P_i$

Donc, pour tout $i \in [0, n-1]$ $\quad -\langle tP_{n-1}, P_i \rangle = c_i \langle P_i, P_i \rangle$. D'après la proposition 1 : $\langle tP_{n-1}, P_i \rangle = \langle P_{n-1}, tP_i \rangle = 0$ si $i+1 < n-1$, donc $c_i = 0 \quad \forall i < n-2$

Donc $P_n - tP_{n-1} = c_{n-1} P_{n-1} + c_{n-2} P_{n-2} \Rightarrow P_n = (t + c_{n-1}) P_{n-1} + c_{n-2} P_{n-2}$

avec
$$\begin{cases} c_{n-1} \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle = -\langle tP_{n-1}, P_{n-1} \rangle \Rightarrow c_{n-1} \in \mathbb{R} \\ c_{n-2} \langle P_{n-2}, P_{n-2} \rangle = -\langle tP_{n-1}, P_{n-2} \rangle = -\langle P_{n-1}, tP_{n-2} \rangle = -\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle \end{cases}$$
(cf. Pro 1)

d'où $c_{n-2} < 0$

CQFD

<u>Remarque</u> : En normalisant la suite $(P_n)_n$, on obtient une relation de récurrence du même type, bien que moins simple : $p_n = (u_n t + v_n) p_{n-1} + w_n p_{n-2}$.

Théorème 6.4.2 : F hilbert (F_n) suite de sev fermés tels que

1°/ $n \neq m \Rightarrow F_n \perp F_m$

2°/ $\oplus F_n$ dense dans F

Si $E = \oplus F_n$ et $j_n : F_n \to E$ / $j_n(x_n) = (0, \dots, x_n, \dots)$, alors il existe une unique isométrie (c.à.d. une appl. lin. bij. qui conserve la norme) de F sur $E = \oplus F_n$ qui coïncide avec j_n sur $F_n \subset F$.

---

preuve : $g : \oplus F_n \longrightarrow \oplus F'_n$ où $\oplus F'_n \subset E$ $\quad (F'_n = j_n(F_n))$

(1) $\quad x_n \in F_n \mapsto j_n(x_n)$

peut être facilement définie par (1). j_n est linéaire sur chacun des F_n et les F_n sont en somme directe, ainsi que les F'_n. Ainsi : $\forall x \in \oplus F_n \quad x = \sum_{k=1}^{K} x_k$ où $x_k \in F_k$.

et $g(x) \doteq \sum_{k=1}^{K} j_k(x_k) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots) \in E$. Il est clair que l'on a :

$\|x\|_F^2 = \langle \sum_{k=1}^{K} x_k \mid \sum_{k=1}^{K} x_k \rangle = \sum_{k=1}^{K} \langle x_k \mid x_k \rangle$ (car $F_n \perp F_m$ si $n \neq m$)

d'où $\|x\|_F = \|g(x)\|_E \Rightarrow g$ continue.

Le théorème de prolongement d'une application lin. continue de $D \to E$ par une application lin. continue de $\overline{D} \to E$ nous donne l'existence et l'unicité de $\overline{g}$, prolongeant g, définie sur $\overline{\oplus F_n} = F$: $\quad \overline{g} : F \to E$ linéaire continue.

On avait $\|x\| = \|g(x)\|$ $\forall x \in \oplus F_n$. En passant à la limite dans l'égalité, on trouve : $\|x\| = \|\overline{g}(x)\|$ $\forall x \in F$ ce qui prouve que $\overline{g}$ conserve la norme.

$\overline{g}$ est donc une isométrie (appl. lin, bij. conserve la norme) de F sur $\overline{g}(F)$.

$$\left.\begin{array}{l} F \text{ complet} \Rightarrow \overline{g}(F) \text{ complet} \\ \overline{g}(F) \text{ dense dans } E \quad (*) \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{g}(F) = E.$$

(*) $\underbrace{\oplus j_n(F_n)}_{\text{dense dans } E} = g(\oplus F_n) \subset \overline{g}(F) \subset E$

$\|\sum_0^\infty x_n\| = \sum_0^\infty \|x_n\|^2$?

Conclusion : $\overline{g} : F \to E$ est une isométrie vectorielle.

Théorèmes (6.5.2) et (5.2)' : Tout revient à montrer le théorème (6.5.2)'.

On pose $F_n = (a_n)$, s.e.v. qui vérifient les conditions d'application du th. 6.4.2.

Ainsi : $\varphi : F \longrightarrow E = \oplus F_n$ est une isométrie.

$x \longmapsto (x_1, \dots, x_k, \dots)$

φ conserve la norme, est linéaire ... $\Rightarrow \varphi$ conserve le produit scalaire.

Ainsi $\underbrace{(x \mid a_k)}_{\text{produit scalaire dans } F} = \underbrace{((x_1, \dots, x_k, \dots) \mid (0, \dots, a_k, \dots))}_{\text{produit scalaire dans } E = \oplus F_n} \doteq (x_k \mid a_k)$

Or $x_k = \lambda_k a_k$. Donc $(x \mid a_k) = \lambda_k (a_k \mid a_k) \Rightarrow \lambda_k = (x \mid a_k)$

Opérateurs hermitiens
Opérateurs compacts

Soit E un e.v. Un opérateur de E n'est autre qu'une application linéaire (continue) de E dans E.

I Adjoint d'un opérateur

1% Définition et existence

Def | E = espace préhilbertien. On dit que l'opérateur u possède un adjoint s'il existe $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x, y \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$

Si u^* existe, elle est unique.

Pro | Si E est un espace de hilbert, alors tout opérateur $u \in \mathcal{L}(E)$ admet un adjoint

preuve :

Soit $y \in E$ fixé, $\begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ x \longmapsto \langle u(x), y\rangle \end{array}$ est linéaire continue. D'après le théorème de dualité $\exists!\, \underbrace{u^*(y)}_{\text{simple notation pour l'instant}} \in E \; / \; \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle \quad \forall x \in E$

- u^* est linéaire : $\langle x, u^*(y_1 + \lambda y_2)\rangle = \langle ux, y_1 + \lambda y_2\rangle = \langle x, u^*(y_1) + \lambda u^*(y_2)\rangle$
- u^* est continue : $|\langle x, u^*(y)\rangle| = |\langle u(x), y\rangle| \leq \|u\| \, \|x\| \, \|y\|$

Pour $x = u^*(y)$, on obtient : $\|u^*(y)\|^2 \leq \|u\| \, \|u^*(y)\| \, \|y\| \Rightarrow \|u^*(y)\| \leq \|u\| \, \|y\|$

Ainsi u^* est continue et $\|u^*\| \leq \|u\|$

CQFD

2% Propriétés de l'adjoint

Pro | Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que u^* et v^* existent. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

$(\lambda u)^* = \bar{\lambda} u^*$ $\qquad (u^*)^* = u$

$(u + v)^* = u^* + v^*$ $\qquad \|u^*\| = \|u\|$

$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ $\qquad \|u \circ u^*\| = \|u\|^2$

preuve :

$\langle \lambda u(x), y\rangle = \lambda \langle u(x), y\rangle = \lambda \langle x, u^*(y)\rangle = \langle x, \underbrace{\bar{\lambda} u^*}_{\in \mathcal{L}(E)}(y)\rangle$

Comme $(\lambda u)^*$ est unique, on aura $(\lambda u)^* = \bar{\lambda} u^*$

De même $\langle u+v(x), y\rangle = \langle x, u^*+v^*(y)\rangle$

$\langle u\circ v(x), y\rangle = \langle v(x), u^*(y)\rangle = \langle x, v^*\circ u^*(y)\rangle$

dans tous les cas, l'unicité de l'adjoint permet de conclure.

On a déjà vu que $\|u^*\| \leq \|u\|$. Montrons que $\|u^*\| \geq \|u\|$:

$$|\langle ux, ux\rangle| = |\langle x, u^*(ux)\rangle| \leq \|x\| \, \|u^*\| \, \|ux\|$$

d'où $\|ux\|^2 \leq \|x\| \, \|u^*\| \, \|ux\| \Rightarrow \|ux\| \leq \|u^*\| \, \|x\|$

$\Rightarrow \|u\| \leq \|u^*\|$ oui

Enfin, comme $\mathcal{L}(E)$ = algèbre de Banach, on a $\|u\circ u^*\| \leq \|u\| \, \|u^*\| = \|u\|^2$

Inversement $\|u^*x\|^2 = |\langle u^*x, u^*x\rangle| = |\langle x, u\circ u^*(x)\rangle|$

$\leq \|u\circ u^*\| \, \|x\|^2$

d'où $\|u^*\|^2 \leq \|u\circ u^*\| \Rightarrow \|u\|^2 \leq \|u\circ u^*\|$ oui

CQFD

Matrice de u^* en fonction de celle de u.

Soit $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire $\langle X, Y\rangle = {}^tX M \bar{Y}$ où M est la matrice de la forme hermitienne $\langle\, ,\,\rangle$ dans une base fixée. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ de matrice U dans cette m̂ base. Notons U^* la matrice de $u^* \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ est donnée par :

$$\langle UX, Y\rangle = \langle X, U^*Y\rangle \Leftrightarrow {}^tX\,{}^tU M \bar{Y} = {}^tX M \bar{U}^* \bar{Y} \qquad \forall X, Y \in \mathbb{C}^n$$

Le lecteur vérifiera qu'alors on a : ${}^tUM = M\bar{U}^*$ d'où :

$$\boxed{U^* = \bar{M}^{-1}\,{}^t\bar{U}\,\bar{M}}$$

(M est inversible car $\langle\, ,\,\rangle$ est non dégénérée)

Remarque : Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale pour le produit scalaire $\langle\, ,\,\rangle$ (elle existe !), dans cette base : $U^* = {}^t\bar{U}$.

II Opérateurs hermitiens

1°/ Définition

Def | Soit E un espace préhilbertien et $u \in \mathcal{L}(E)$. u est dit "hermitien", ou "auto-adjoint", ou encore "symétrique" si le corps de base est $\mathbb{R}$, si u vérifie

$$\boxed{u^* = u}$$

Si u est un opérateur hermitien, on peut définir canoniquement la forme hermitienne φ par

$$\varphi : E\times E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})$$
$$(x,y) \longmapsto \langle ux, y\rangle$$

puisque $\varphi(x,y) = \langle ux,y\rangle = \langle x, uy\rangle = \overline{\langle uy, x\rangle} = \overline{\varphi(y,x)}$.

Par définition, on dira que u est non dégénérée (resp. positif) si la forme hermitienne associée à u est non dégénérée (resp. positive.) Pareil pour les matrices.

Pro | Soit u un opérateur hermitien de E.
Alors $$\|u\| = \sup_{\|x\|\leq \text{ ou } =1} |\langle u(x), x\rangle|$$

démonstration :

* Soit $\alpha = \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle u(x), x\rangle|$. D'après Cauchy-Schwarz, nous avons :

$$|\langle u(x), x\rangle| \leq \|u\|\,\|x\|^2 \Rightarrow \alpha \leq \|u\|$$

* Inversement, $\forall x,y \in E$ $\quad \mathrm{Re}\,\langle u(x), y\rangle = \frac{1}{4}(\langle u(x+y), x+y\rangle - \langle u(x-y), x-y\rangle)$

D'où $$|\mathrm{Re}\,\langle u(x),y\rangle| \leq \frac{1}{4}(\alpha\|x+y\|^2 + \alpha\|x-y\|^2)$$
$$\leq \frac{\alpha}{4}\left(\frac{\|x\|^2+\|y\|^2}{2}\right)2 \quad \text{(identité du parallélogramme)}$$
$$\leq \frac{\alpha}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

Pour $\|x\|\leq 1$ et $\|y\|\leq 1$ $\quad |\mathrm{Re}\,\langle u(x),y\rangle| \leq \alpha$.

Appliquons cette formule à $\begin{cases} 0<\|x\|\leq 1 \\ y = \dfrac{u(x)}{\|x\|\|u\|} \end{cases}$ où $u\neq 0$ (sinon trivial)

On obtient : $\|u(x)\|^2 \leq \alpha\|u\|\|x\| \underset{(*)}{\Rightarrow} \|u\|\leq\alpha$

[(*) on prend $x_0 \in \partial\overline{B(0,1)}$ / $\|u\| = \|u(x_0)\|$, qui existe car $\partial\overline{B(0,1)}$ est compact. Alors $\|u(x_0)\|^2 \leq \alpha\|u\|\underbrace{\|x_0\|}_{=1} \Rightarrow \|u\|^2\leq\alpha\|u\| \Rightarrow \|u\|\leq\alpha$ oui]

2°/ Exemples d'opérateurs hermitiens,

① Soit F un sev complet de E préhilbertien, et P la projection orthogonale sur F. Alors P est hermitien positif.

En effet : $\begin{cases}\langle x-P(x), P(y)\rangle = 0 \\ \langle y-P(y), P(x)\rangle = 0\end{cases} \Rightarrow \langle x, P(y)\rangle = \langle P(x), y\rangle \Rightarrow P$ hermitien

et $\langle P(x), x\rangle = \langle P(x), P(x)\rangle \geq 0 \Rightarrow P$ positif.

② $E = \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$ où $I = [0,1]$ est muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_I f(t)\overline{g(t)}\,dt$
($\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$ est alors un préhilbertien sans être un hilbert).

Soit $H : I \times I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue donnée. Soit $u : E \longrightarrow E$, $f \longmapsto u(f)$

où $u(f)(x) = \int_I H(x,t) f(t)\,dt$

a) Montrer que u est linéaire continue de E dans E

b) Montrer que u possède un adjoint u^*.

c) Sous-quelles conditions u est-il hermitien ?

Solution :

a) On a bien $u(f) \in E$ et u linéaire. On va montrer que u est compacte (voir § suivant) ce qui prouvera bien que u est continue. Remarquons que $Id : (E, \|\ \|_\infty) \to (E, \|\ \|_2)$ est continue car $\|f\|_2^2 \leq \|f\|_\infty^2$, par suite $u(B)$ relativement compact dans $(E, \|\ \|_\infty) \Rightarrow u(B)$ relativement compact dans $(E, \|\ \|_2)$ et il suffit de montrer que pour tout borné $B \subset E$, $u(B)$ est relativement compact dans E muni de la convergence uniforme.

Utilisons le théorème d'Ascoli :

- $\underline{u(B) \text{ est également continue}}$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 / \|x-y\| < \eta \Rightarrow |H(x,t) - H(y,t)| < \varepsilon$

d'où $|u(f)(x) - u(f)(y)| \leq \varepsilon \int_I |f(t)|\,dt \leq \varepsilon \|f\|_2$ et $\|f\|_2$ est borné si $f \in B = \overline{B(0,1)}$

- $\underline{u(B)(I) \subset \mathbb{C} \text{ est borné}}$: $|u(f)(x)| \leq \int_I |H(x,t)||f(t)|\,dt \leq K \int_I |f(t)|\,dt$

(où $K = \sup_{(x,t)} |H(x,t)|$)

$\leq K \underbrace{\|f\|_2}_{\text{borné si } f \in B}$ (cf. Hölder)

On peut donc appliquer le th. d'Ascoli :

$u(B)$ équicontinue en tt pt
$\forall x \in I \quad u(B)(x) = \{u(f)(x) / f \in u(B)\}$ précompact $\Big\} \Leftrightarrow \Big\{ u(B)$ précompact dans $(E, \|\ \|_\infty)$

(NB : Ici $u(B)$ précompact $\Leftrightarrow u(B)$ relativement compact ; car $(E, \|\ \|_\infty) =$ Banach)

b) Si u^* existe, il vérifie $\langle uf, g\rangle = \langle f, u^*g\rangle\ \forall f, g \in E$.

On : $\begin{cases} \langle uf, g\rangle = \int_I \left(\int_I H(x,t) f(t)\,dt\right) \overline{g}(x)\,dx = \int_I \left(\int_I H(x,t)\,\overline{g}(x)\,dx\right) f(t)\,dt \quad \text{(Fubini)} \\ \langle f, u^*g\rangle = \int_I f(t)\,\overline{u^*g}(t)\,dt \end{cases}$

$u^*(g)(t) = \int_I \overline{H}(x,t)\,g(x)\,dx$ convient !

En conclusion u^* est l'opérateur sur E défini par la fonction noyau $H^*(x,t) = \overline{H}(t,x)$. C'est donc aussi un opérateur compact. On verra plus loin que l'adjoint d'un opérateur compact est toujours compact.

c) u est hermitien ssi $H = H^*$. En effet,

$u = u^* \Leftrightarrow u^*(f)(x) = u(f)(x)\ \forall f \in E\ \forall x \in I \Leftrightarrow \int_I \overline{H}(t,x) f(t)\,dt = \int_I H(x,t) f(t)\,dt$

$\Leftrightarrow \int_I (\overline{H}(t,x) - H(x,t)) f(t)\,dt = 0\ \forall x \in I\ \forall f \in E$

Pour x fixé et pour $f(t) = (H(t,x) - \overline{H}(x,t))$ on aura $\int_I \underbrace{|\overline{H}(t,x) - H(x,t)|^2}_{\text{continue}}\,dt = 0$

d'où $\overline{H}(t,x) = H(x,t) \Leftrightarrow H^* = H$.

III Opérateurs compacts

1°/ Définition

important ↓

E et E' désignent deux e.v. normés, et $u \in L(E,E')$

Def | u est dit "compacte" si
$\forall B$ borné de E $\quad u(B)$ est relativement compact dans E'

(NB : A relativement compact $\Leftrightarrow \bar{A}$ compact)

Propriétés immédiates :

Pro |
1) u compact $\Leftrightarrow \exists V$ voisinage de 0 dans E tel que $u(V)$ soit relativement compact dans E'.
2) u compact $\Leftrightarrow u(\overline{B(0,1)})$ relativement compact dans E'
3) u compact $\Rightarrow$ u continue et la réciproque est fausse.
4) Si Im u est de dimension finie, u compact $\Leftrightarrow$ u continue.

preuve :

1) Supposons l'existence d'un voisinage V de 0 tel que $u(V)$ soit rel. compact. $\exists \varepsilon > 0 \ / \ B(0,\varepsilon) \subset V$. Soit B un borné de E quelconque. $\exists B(0,r)$ tel que $B \subset B(0,r)$ et :

$$u(B) \subset u(B(0,r)) = u\left(\frac{r}{\varepsilon} B(0,\varepsilon)\right) = \frac{r}{\varepsilon} u(B(0,\varepsilon))$$

d'où $\quad u(B) \subset \frac{r}{\varepsilon} u(V) \subset \frac{r}{\varepsilon} \overline{u(V)}$

$\overline{u(V)}$ compact $\Rightarrow \frac{r}{\varepsilon}\overline{u(V)}$ compact $\Rightarrow u(B)$ rel. compact cqfd

2) Il suffit de prendre $V = \overline{B(0,1)}$ et d'appliquer le 1).

3) D'après le 2), $u(\overline{B(0,1)})$ est relativement compact, donc borné dans E'.
Par suite $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| < \infty$ ce qui montre la continuité de u.
Ainsi on a $u \in L(E,E')$ et u compacte $\Rightarrow u \in \mathcal{L}(E,E')$

La réciproque est fausse en général : pour le voir, prenons

$$Id : E \longrightarrow E \quad \text{où } \dim E = +\infty$$

Id est continue mais n'est pas compact puisque, autrement $\overline{Id(\overline{B(0,1)})}$ serait un voisinage compact de 0 dans E, et donc E serait localement compact $\Rightarrow \dim E < \infty$ (Th. Riesz), ce qui est absurde.

4) Soit $u : E \to E'$ continue et telle que $\dim \operatorname{Im} u < \infty$. Posons $F = \operatorname{Im} u$. Comme F est de dimension finie, c'est un e.v. localement compact et donc $\exists V'$ voisinage compact de 0 dans E'. Mais alors $V = u^{-1}(V')$ est un voisinage de 0 dans E tel que $u(V) = u(u^{-1}(V')) = V'$ compact. Le 1) précédent montre bien que $u : E \to F$ est une application compact.

Comme $u(V)$ compact de $F \Rightarrow u(V)$ compact de $E' \supset F$, on aura aussi montré que $u : E \to E'$ est compacte.

CQFD

2°/ Propriétés des opérateurs compacts

Th | 1) Soient u et v deux applications linéaires compactes. Alors $u+v$ est compacte.
2) Soient : $E_1 \xrightarrow{f} E \xrightarrow{u} E' \xrightarrow{g} E_2$ où f, g sont linéaires continues. Si u est compacte, alors $g \circ u \circ f$ est compacte.

preuve :

1) Soit $B \subset E$ borné. Alors $u+v(B) \subset u(B) + v(B)$

$$\overline{u+v(B)} \subset \overline{u(B)} + \overline{v(B)}$$

et la somme de 2 compacts de E' est un compact de E' (cf. suites)

2) Soit $B \subset E_1$ un borné. $f(B)$ est borné, donc $u(f(B))$ est relativement compact dans E', et $g \circ u \circ f(B) \subset \underbrace{g(\overline{u(f(B))})}_{\text{compact (image d'un compact par } g \text{ continue)}} \Rightarrow g \circ u \circ f(B)$ rel. compact.

CQFD

Th | Si E' est un Banach, la limite u d'une suite d'applications compactes u_n de E dans E' est compacte

Soit $B = \overline{B(0,1)}$. Il faut montrer que $u(B)$ est précompact dans E'. (car E' complet $\Rightarrow$ « A précompact $\Leftrightarrow$ A rel. compact)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad n \geq N \Rightarrow \|u - u_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$u_N(B) \text{ précompacte} \Rightarrow u_N(B) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i', \frac{\varepsilon}{2})$$

$$\Rightarrow u(B) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i', \varepsilon) \quad \text{cqFd}$$

Th | L'adjoint d'un opérateur compact u d'un espace de Hilbert dans lui-même est compact.

démonstration : Prenons $B = \overline{B(0,1)}$ et montrons que $u^*(B)$ est précompact (dans E complet !). Soit $F = \overline{u(B)}$ compact par hypothèse, et $\mathcal{C}(F, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Soit $\mathcal{A} = \{ \varphi_y : F \to \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \;/\; x \mapsto \varphi_y(x) = \langle x, y \rangle, \; y \in B \}$

Le théorème d'Ascoli donne :

$$\mathcal{A} \text{ est précompact} \Big\} \underset{\uparrow \text{ (F compact)}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \ast \ \mathcal{A} \text{ équicontinue en tout point} \\ \ast \ \mathcal{A}(x) = \{ \langle x, y \rangle / y \in B \} \text{ précompact} \end{cases}$$

* $|\varphi_y(x)-\varphi_y(x')| = |\langle x-x', y\rangle| \leq \|x-x'\|\,\|y\| \leq \|x-x'\| \quad \forall y \in B$

donc $\mathcal{A}$ est également continue.

* $\mathcal{A}(x)$ est borné dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) puisque, pour x fixé :

$$|\varphi_y(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \underbrace{\|x\|}$$

majoration indépendante de $y \in B$.

Donc $\mathcal{A}$ est précompacte :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y_1, \dots, y_m \in B \quad \forall y \in B \quad \exists j \quad \|\varphi_y - \varphi_{y_j}\|_\infty < \varepsilon$$

Et $\|\varphi_y - \varphi_{y_j}\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in B \quad |\varphi_y - \varphi_{y_j}(\underbrace{u(x)}_{\in u(B) \subset F})| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \forall x \in B \quad |\langle u(x), y - y_j\rangle| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall x \in B \quad |\langle x, u^*(y) - u^*(y_j)\rangle| < \varepsilon$$

De 2 choses l'une : • Si $u^*(y) = u^*(y_j)$, on aura bien $u^*(y) \in \overline{\bigcup_{j=1}^{m} B(u^*(y_j), \varepsilon)}$

• Sinon, prenons $x = \dfrac{u^*(y) - u^*(y_j)}{\|u^*(y) - u^*(y_j)\|}$

et nous aurons : $\|u^*(y) - u^*(y_j)\| < \varepsilon \Rightarrow u^*(y) \in \overline{\bigcup_{j=1}^{m} B(u^*(y_j), \varepsilon)}$

Ainsi : $u^*(B) \subset \overline{\bigcup_{j=1}^{m} B(u^*(y_j), \varepsilon)}$. cqFd

(Spectre d'un opérateur continu : dieudonné page 320 F1.)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E = e.v. normé complexe. On définit le spectre de u par : 1

$$Sp(u) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \ / \ u - \lambda \, Id \text{ non inversible} \}$$

Les valeurs propres sont incluses dans le spectre de l'opérateur u. En dim. finie, $Sp(u) = \{$valeurs propres de $u\}$.

On note $R_u = \complement_{\mathbb{C}} Sp(u)$. C'est l'ensemble des ~~valeurs~~ éléments "réguliers". C'est la résolvante de u.

<u>Remarque</u> : il peut exister des valeurs spectrales qui ne soient pas des v. props. (ex 11.1.1 p 320)

Pro | 11.1.2.
E = Banach, sur $\mathbb{C}$.
$u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $Sp(u)$ est un compact ~~[illegible]~~ inclus dans la boule $\overline{B}(0, \|u\|)$

preuve :

* <u>$Sp(u)$ est un fermé de E</u>

Soit $z_0 \in \complement_{\mathbb{C}} Sp(u)$, alors $u - z_0 I$ est inversible, et pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$u - zI = u - z_0 I - (z - z_0) I = (u - z_0 I)\left(I - (z - z_0)\underbrace{(u - z_0 I)^{-1}}_{a} \right)$$

~~Pour $\|(z - z_0) a\| < 1$, c.à.d dès que~~ ~~Dès que~~

On a $\|(z - z_0) a\| < 1$ dès que $|z - z_0| < \frac{1}{\|a\|}$, et par suite $I - (z - z_0) a$ est bijective pour tout z tel que $|z - z_0| < \frac{1}{\|a\|}$, d'inverse $\sum_{n \geq 0} (z - z_0)^n a^n \in \mathcal{L}(E)$

Alors $u - zI$, ~~composé~~ est inversible.

* <u>$Sp(u) \subset \overline{B}(0, \|u\|)$</u>

Soit $z \notin \overline{B}(0, \|u\|)$, alors $|z| > \|u\|$. ~~On~~ Montrons que $zI - u$ est inversible :

$$\left[z\left(I - \frac{u}{z} \right) \right]^{-1} = \frac{1}{z} \sum_{n \geq 1} \frac{u^n}{z^n} \quad \text{dès que } \frac{\|u\|}{|z|} < 1.$$

D'où $z \notin Sp(u)$.

~~on a unique $\|A\| \leq r(A)$~~

$\vdash (\langle Ax, x \rangle)$

$Sp(u)$ est un fermé borné de $\mathbb{C}$, donc un compact.

~~$Sp(u) \neq \emptyset$ ... $(f(x))$~~

Pro | E = Banach sur $\mathbb{C}$, $u \in \mathcal{L}(E)$.
L'appl. $R_u \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $z \overset{f}{\longmapsto} (zI - u)^{-1}$ est analytique sur R_u.

D'après la proposition précédente, R_u est ouvert et, en notant $a = (u - z_0 I)^{-1}$

$$\forall z_0 \in R_u \quad \exists B\left(z_0, \frac{1}{\|a\|}\right) \ / \ \forall z \in B$$

~~$f(z) = \sum (z - z_0)^n a^n$~~

$$f(z) = \left(\sum_{n \geq 0} (z - z_0)^n a^n\right) a$$

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a^{n+1} (z - z_0)^n$$

Pro | $Sp(u) \neq \emptyset$

Si $R_u = \mathbb{C}$, donc $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ est analytique $\Leftrightarrow$ holomorphe.
Montrons qu'elle est bornée sur $\mathbb{C}$.

$$\forall z \notin \bar{B}(0, \|u\|) \quad (zI - u)^{-1} = \frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{z^n}$$

$$\|(zI - u)^{-1}\| \leq \sum_{n \geq 0} \frac{\|u\|^n}{|z|^{n+1}} = \frac{1}{|z|} \frac{1}{1 - \frac{\|u\|}{|z|}} = \frac{1}{|z| - \|u\|}$$

Pour $|z| \geq 2\|u\|$, on a $\|(zI - u)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\|u\|}$

Pour $|z| \leq 2\|u\|$

borné par $\frac{1}{\|u\|}$

$f : \overline{B}(0, 2\|u\|) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$

est continue sur $\overline{B}(0, 2\|u\|)$, le compact

(car f analytique)

2‖u‖

0

Donc $f(\overline{B})$ = compact de $\mathcal{L}(E)$

$\| \ \| : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{R}$ continue $\Rightarrow$ $\| \ \| \circ f(\overline{B})$ = compact de $\mathbb{R}$

$\exists M \quad \forall z \in \overline{B}(0, 2\|u\|) \quad \|f(z)\| < M$

Donc f est donc bornée sur $\mathbb{C}$. $\Longrightarrow$ f constante sur $\mathbb{C}$ (Th. Liouville)

C'est absurde.

Donc $Sp(u) \neq \emptyset$

Def | Le rayon spectral $\rho(u)$ de l'opérateur u est
$$\rho(u) = \sup\{|\lambda| \,/\, \lambda \in Sp(u)\}$$

Pb | Montrer que, si E est un Banach.
$$\rho(u) = \overline{\lim} \|u^n\|^{\frac{1}{n}}$$

$x = \overline{\lim}\, x_n$ ssi $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N \,/\quad x_n > x - \varepsilon & (1) \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad n > N \Rightarrow x_n < x + \varepsilon & (2) \end{cases}$

Ici :

(1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N \,/\quad \|u^n\|^{\frac{1}{n}} > \rho(u) - \varepsilon$?

5 : Décomposition spectrale d'un espace de Hilbert relativement à un opérateur normal compact

Décomposition spectrale : théorème de Riesz

Notations : Soit E normé et $u \in \mathcal{L}(E)$. On notera $\Lambda(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u.

$$\Lambda(u) = \{ \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \;,\; u - \lambda\, Id_E \text{ non injectif} \}$$

Pour $\lambda \in \Lambda(u)$, on notera E_λ l'espace propre relatif à la valeur propre λ de u. E_λ est un s.e.v. fermé ($\neq \{0\}$) de E

Remarquons que :

$$\Lambda(u) \subset B(0, \|u\|) \subset \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

En effet, soit $\lambda \in \Lambda$ et $x \in E_\lambda$ $(x \neq 0)$:

$$\|u(x)\| = |\lambda| \|x\| \leq \|u\| \|x\| \Rightarrow |\lambda| \leq \|u\|$$

Pro 1 | E = e.v.n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ compact et $\lambda \in \Lambda(u) \neq 0$.
Alors : $\dim E_\lambda(u) < \infty$

Preuve :

Soit U un voisinage de 0 dans E tel que $u(U)$ soit relativement compact.

Notons $U_\lambda = U \cap E_\lambda$ (voisinage de 0 dans E_λ)

$u(U_\lambda) = \lambda U_\lambda$ = voisinage de 0 dans E_λ car $\lambda \neq 0$

On a : $u(U_\lambda) \subset \underbrace{\underbrace{\overline{u(U_\lambda)}}_{\text{compact}} \cap \underbrace{E_\lambda}_{\text{fermé}}}_{\text{compact}} \Rightarrow \overline{u(U)} \cap E_\lambda$ = voisinage compact de 0 dans $E_\lambda(u)$

D'après le théorème de Riesz, comme E_λ est localement compact, $\dim E_\lambda(u) < \infty$

CQFD

Pro 2 | E = hilbert et $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Alors :

a) $\lambda \in \Lambda(u) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \Lambda(u^*)$ et les espaces propres $E_\lambda(u) = E_{\bar{\lambda}}(u^*)$

b) Si $\lambda \neq \mu \in \Lambda(u)$ $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont $\perp$

(Rem : u normal $\Leftrightarrow$ $uu^* = u^*u$)

Preuve :

a) <u>$E_\lambda(u)$ est stable par u^*</u>

Soit $x \in E_\lambda$. Est-ce que $u^*(x) \in E_\lambda$?

$$u(u^*(x)) = u^*(u(x)) = u^*(\lambda x) = \lambda u^*(x)$$

et l'on a bien $u^*(x) \in E_\lambda$

Montrons que <u>$E_\lambda(u) \subset E_{\bar{\lambda}}(u^*)$</u>.

$x, y \in E_\lambda(u)$ $\quad \langle u(y) - \lambda y, x \rangle = 0$

$\quad \langle y, \underbrace{u^*(x) - \bar{\lambda} x}_{} \rangle = 0$

$\begin{cases} x \text{ fixé} \\ y \text{ variable dans } E_\lambda(u) \end{cases}$ $\quad \in E_\lambda(u)$ (grâce au 1er point) donc $0 = u^*(x) - \bar{\lambda} x$

et l'on a bien $u^*(x) = \bar{\lambda} x \quad \forall x \in E_\lambda(u)$

Donc $\begin{cases} E_\lambda(u) \subset E_{\bar{\lambda}}(u^*) \\ \text{et} \\ \bar{\lambda} \in \Lambda(u^*) \end{cases}$

b) $x \in E_\lambda(u)$, $y \in E_\mu(u)$

$\begin{cases} \langle u(x), y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \\ \text{et} \\ \langle u(x), y \rangle = \langle x, \underbrace{u^*(y)}_{\bar{\mu} y} \rangle = \bar{\bar{\mu}} \langle x, y \rangle \quad \text{(cf a))} \end{cases}$

Donc $(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$ et $\lambda \neq \mu$, d'où $\langle x, y \rangle = 0$.

On a bien montré que $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$

$$\boxed{E_\lambda(u) = E_{\bar{\lambda}}(u^*)} \qquad \boxed{\lambda \in \Lambda(u) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \Lambda(u^*)}$$

$$\boxed{E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)}$$

Pro 3 | E = hilbert. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur normal compact. Alors $\Lambda(u)$ est au plus dénombrable et s'il est infini, 0 est un point d'accumulation.

Démonstration :

Il suffit de montrer qu'en dehors de tout disque (de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de centre 0 et de rayon ε, il existe au plus un nombre fini d'éléments de $\Lambda(u)$.

Supposons le contraire :

$\exists \varepsilon > 0$ et $(\lambda_n)_n$ suite d'éléments de $\Lambda(u) \cap \complement B(0, \varepsilon)$

(et $\lambda_n \neq \lambda_m$)

$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\lambda_n| \leq \|u\|$ et $|\lambda_n| \geq \varepsilon$.

Les λ_n sont dans une couronne de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Quitte à extraire une sous-suite de $(\lambda_n)_n$ on peut supposer que $\lambda_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda \in$ cette couronne (compacte)

Donc $\quad \varepsilon \leq |\lambda| \leq \|u\|$.

D'autre part, soit $x_n \in E_{\lambda_n}(u)$ tel que $\|x_n\| = 1$

Alors $u(x_n) \in \underbrace{u(B'(0,1))}$

relativement compact dans E (cf. u compact)

Quitte à extraire une sous-suite de $(u(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, on peut supposer que $\quad u(x_n) \longrightarrow y \in E \quad (n \to +\infty)$

On a $\quad u(x_n) = \lambda_n x_n \Rightarrow x_n = \dfrac{1}{\lambda_n} u(x_n) \longrightarrow \dfrac{y}{\lambda} \quad (n \to +\infty)$

La suite $(x_n)_n$ converge donc dans E, ce qui est absurde puisque, d'après Pro 2, $u(x_n) \perp u(x_m)$ $(n \neq m)$ et donc

$$\|x_n - x_m\| = \sqrt{2}.$$

CQFD

NB : u point d'accumulation de (u_n) ssi $\forall \mathcal{V}(u) \quad \exists n \ / \ u_n \in \mathcal{V}(u)$ et $u_n \neq u$.

u normal compact $\Rightarrow \Lambda(u)$ dénombrable

Pro 4 | Soit E un espace de Hilbert et soit u un opérateur compact, normal si le corps de base est $\mathbb{C}$, symétrique si le corps de base est $\mathbb{R}$. Alors il existe au moins $\lambda \in \Lambda(u)$ tel que $|\lambda| = \|u\|$

exercice : Soit $E = \ell^2$ et $u_s(\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) = (0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$
Alors $\|u(\xi)\|^2 = \sum_n |\xi_n|^2 = \|\xi\|^2$ et u n'admet pas de valeurs propres.

Démonstration :
Supposons que $u \neq 0$ (sinon évident). Quitte à multiplier u par un scalaire non nul, on peut supposer $\|u\| = 1$

Cas où u hermitien

Comme u est hermitien on aura

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle u(x), x\rangle| = 1$$

$\exists (x_n)_n \quad x_n \in E \ / \ \|x_n\| = 1$ et telle que $\langle u(x_n), x_n\rangle \to 1 \ (n \to +\infty)$
(quitte à changer u en $-u$) (car u hermitien $\Rightarrow \langle u(x), x\rangle \overset{\in \mathbb{R}}{\geq 0} \ \forall x$)
$x_n \in B'(0,1)$ et $u(B'(0,1))$ est relativement compact dans E puisque u est un opérateur compact. Quitte à extraire une sous-suite de $(u(x_n))_n$, on aura $u(x_n) \to y \in \overline{u(B'(0,1))} \quad (n \to +\infty)$
Mais $\quad |\langle u(x_n), x_n\rangle| \leq \|u(x_n)\|$ d'après Cauchy-Schwarz
et $\|u(x_n)\| \leq \|u\| \|x_n\| = 1$

$$\underbrace{|\langle u(x_n), x_n\rangle|}_{\to 1 \ (n \to +\infty)} \leq \|u(x_n)\| \leq 1$$

donc $\lim_{n \to +\infty} \|u(x_n)\| = 1$ et par suite $\|y\| = 1$

On va montrer que $x_n \to y \ (n \to +\infty)$:

$$\|y - x_n\|^2 = \|y\|^2 + \|x_n\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle y, x_n\rangle$$
$$= 2 - 2 \operatorname{Re} \langle y, x_n\rangle \qquad (1)$$

Comme $|\langle y - u(x_n), x_n \rangle| \leq \|y - u(x_n)\| \to 0 \; (n \to +\infty)$

on aura $\lim |\langle y, x_n \rangle - \langle u(x_n), x_n \rangle| = 0$

c.à.d $\lim \langle y, x_n \rangle = 1$ donc $\lim 2 \mathrm{Re} \langle y, x_n \rangle = 2$

En revenant dans (1):

$$\|y - x_n\|^2 \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

On aura donc bien $\lim x_n = y$.

Donc $u(x_n) \to u(y)$.

On savait déjà que $u(x_n) \to y$. C'est donc que $u(y) = y$.

y est non nul puisque $\|y\| = 1$. 1 est donc valeur propre de u et $\|u\| = 1$. oui

Cas où u est normal dans $\mathbb{C}$ (c.à.d $u^* u = u u^*$)

Alors $u^* \circ u$ est un opérateur hermitien positif de norme $\|u\|^2 = 1$.

u compact $\Rightarrow u^*$ compact $\Rightarrow u^* \circ u$ compact.

D'après ce qui précède : $1 \in \Lambda(u^* u)$.

Soit $F = E_1(u^* u)$. D'après la pro. 1 : $\dim F < \infty$

- F est stable par u et par u^* :

En effet, soit $x \, / \, u^* u(x) = x$

$u(x) \in F \Leftrightarrow u^* u(u(x)) = u u^* u(x) = u(x)$

$u^*(x) \in F \Leftrightarrow u^* u(u^*(x)) = u^*(u^* u(x)) = u^*(x)$

Ainsi $u^*|_F$ est l'adjoint de $u|_F$ qui est donc un opérateur normal sur F.

Or : $\exists \lambda \in \Lambda(u) \quad \exists x \in F (\neq 0) \; / \; u(x) = \lambda x$ (car $\dim_{\mathbb{C}} F < \infty$)

La pro. 2 appliquée à $u|_F$ montre que $u^*(x) = \bar{\lambda} x$

d'où

$$u^* u(x) = u^*(\lambda x) = \lambda \bar{\lambda} x = |\lambda|^2 x = x \quad \text{car } x \in F$$

d'où $|\lambda| = 1$.

CQFD

Pro 5 | Soit E un espace de hilbert et u un opérateur compact, normal si le corps de base est $\mathbb{C}$, symétrique si le corps de base est $\mathbb{R}$. Alors :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda(u)} E_\lambda(u)$$

Preuve :

Soit $E_{\Lambda(u)} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda(u)} E_\lambda(u)$ (d'après proposition 2)

Il reste à montrer que $E_{\Lambda(u)}$ est dense dans E

$\Leftrightarrow E_\lambda(u)^\perp = F = \{0\}$ ($\Rightarrow$ th. de projection)

F est stable par u et u^* : en effet, soit $x \in F$ et $x_\lambda \in E_\lambda(u)$,

$$\left.\begin{aligned} \langle u(x), x_\lambda \rangle &= \langle x, u^*(x_\lambda) \rangle = \langle x, \bar{\lambda} x_\lambda \rangle = \bar{\bar{\lambda}} \langle x, x_\lambda \rangle = 0 \\ \langle u^*(x), x_\lambda \rangle &= \langle x, u(x_\lambda) \rangle = \langle x, \lambda x_\lambda \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x_\lambda \rangle = 0 \end{aligned}\right\}$$

Donc $u^*|_F$ est l'adjoint de $u|_F$ qui est donc un opérateur normal ($\mathbb{C}$) ou symétrique ($\mathbb{R}$) compact.

F étant fermé ($\perp$), c'est un hilbert. D'après la proposition 4 :

$\exists \lambda$ valeur propre de $u|_F$

$\exists x \neq 0$ $x \in F$ associé / $u(x) = \lambda x$

Or $x \neq 0$ et $x \in E_\lambda(u) \cap F = \{0\} \Rightarrow x = 0$ ce qui est absurde.

Donc $F = \{0\}$. CQFD

En résumé, nous avons le :

Théorème de Riesz

Th | Soit E un espace de hilbert, et soit u un opérateur compact, normal ($\mathbb{C}$) ou symétrique ($\mathbb{R}$). Alors :

1) $\Lambda(u)$ est fini ou peut être rangé en une suite tendant vers 0

2) $\Lambda(u)$ est contenu dans le disque de centre 0 et de rayon

Z

$\|u\|$, et possède un élément de module $\|u\|$

3) $\forall \lambda \in \Lambda(u)$ sauf peut être pour $\lambda = 0$, $\dim E_\lambda(u) < \infty$

4) Les $E_\lambda(u)$ sont deux à deux orthogonaux.

5) $E = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda(u)$

6) $u\left(\sum_\lambda x_\lambda\right) = \sum_\lambda \lambda x_\lambda$ et $u^*\left(\sum_\lambda x_\lambda\right) = \sum_\lambda \bar{\lambda} x_\lambda$

Il s'agit de la "décomposition spectrale de E relativement à u".

Exercice d'application

Soit u un opérateur hermitien, positif, compact de E (espace de hilbert). Montrer que :

$\exists !$ v opérateur hermitien positif compact de E / $u = v^2$

Solution : On voudrait pouvoir considérer $v\left(\sum_n x_{\lambda_n}\right) = \sum_n \sqrt{\lambda_n}\, x_n$

On le peut car :

$$\left\|\sum_{k=1}^n \sqrt{\lambda_k}\, x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \, \|x_{\lambda_k}\|^2 \leq \|u\| \left(\sum_{k=1}^n \|x_{\lambda_k}\|^2\right)$$

$$\leq \|u\| \sum_{k \geq 1} \|x_{\lambda_k}\|^2 < \infty \qquad (1)$$

v est bien linéaire et $v^2 = u$

Montrons que v est continue ($\|v\| = \sqrt{\|u\|}$) :

* (1) nous montre que $\|v\| \leq \sqrt{\|u\|}$
* le lecteur montrera que $\|v\| \geq \sqrt{\|u\|}$

v est hermitien, positif.

v est compact :

S'il y a un nombre fini de valeurs propres, u s'envoie dans un espace de dimension finie (la somme hilbertienne = somme directe

finie) : u est donc compacte.
Si il existe un nombre infini de valeurs propres (notées λ_n), on considère

$$v_n : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \sum_{k=1}^{n} x_{\lambda_k} & \longrightarrow & \sum_{1}^{n} \sqrt{\lambda_k}\, x_{\lambda_k} \end{array}$$

$v_n \to v$ $(n \to +\infty)$ et chaque v_n compact $\Rightarrow$ v est compact.
(dans $\mathcal{L}(E,E)$)

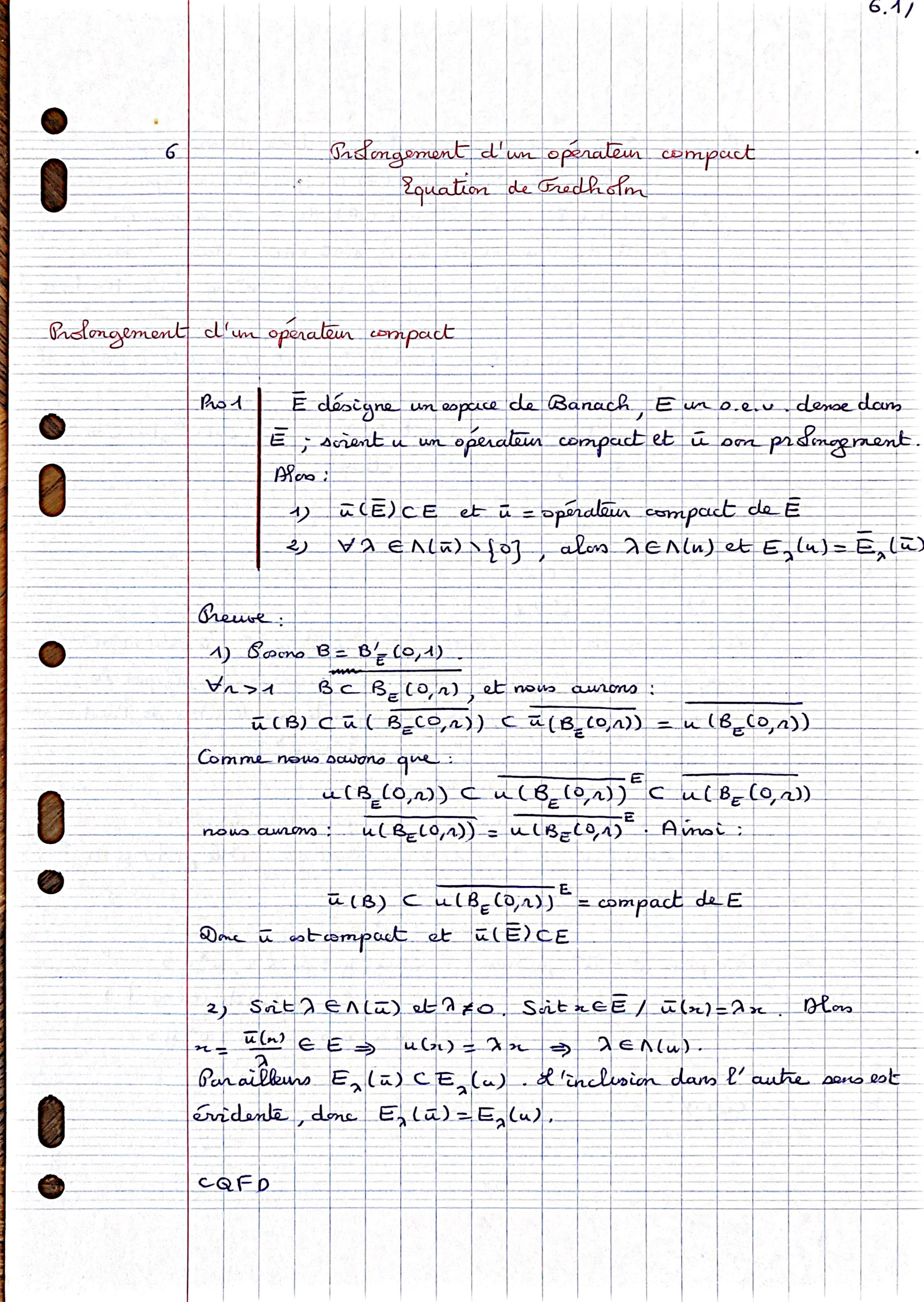
<u>Unicité</u> : Soit v muni de ses valeurs propres $(\mu_n)_n$, et soit la décomposition

$$E = \bigoplus E_{\mu_k}(v)$$

On pose $\lambda_k = \mu_k^2 \in \Lambda(u)$
Or $E_{\mu_k}(v) \subset E_{\lambda_k}(u)$

$$v\left(\sum_k y_k\right) = \sum_k \mu_k y_k \quad \text{où } y_k \in E_{\mu_k}(v)$$

$$= \sum \sqrt{\lambda_k}\, y_k \Rightarrow E = \bigoplus_k E_{\lambda_k}(u)$$



6 Prolongement d'un opérateur compact
Equation de Fredholm

Prolongement d'un opérateur compact

Prop 1 $\bar{E}$ désigne un espace de Banach, E un s.e.v. dense dans $\bar{E}$; soient u un opérateur compact et $\bar{u}$ son prolongement. Alors :

1) $\bar{u}(\bar{E}) \subset E$ et $\bar{u}$ = opérateur compact de $\bar{E}$
2) $\forall \lambda \in \Lambda(\bar{u}) \setminus \{0\}$, alors $\lambda \in \Lambda(u)$ et $E_\lambda(u) = \bar{E}_\lambda(\bar{u})$

Preuve :

1) Posons $B = B'_{\bar{E}}(0,1)$.

$\forall r > 1$ $\quad B \subset \overline{B_E(0,r)}$, et nous aurons :

$$\bar{u}(B) \subset \bar{u}(\overline{B_E(0,r)}) \subset \overline{\bar{u}(B_E(0,r))} = \overline{u(B_E(0,r))}$$

Comme nous savons que :

$$u(B_E(0,r)) \subset \overline{u(B_E(0,r))}^E \subset \overline{u(B_E(0,r))}$$

nous aurons : $\overline{u(B_E(0,r))} = \overline{u(B_E(0,r))}^E$. Ainsi :

$$\bar{u}(B) \subset \overline{u(B_E(0,r))}^E = \text{compact de } E$$

Donc $\bar{u}$ est compact et $\bar{u}(\bar{E}) \subset E$

2) Soit $\lambda \in \Lambda(\bar{u})$ et $\lambda \neq 0$. Soit $x \in \bar{E}$ / $\bar{u}(x) = \lambda x$. Alors $x = \frac{\bar{u}(x)}{\lambda} \in E \Rightarrow u(x) = \lambda x \Rightarrow \lambda \in \Lambda(u)$.
Par ailleurs $E_\lambda(\bar{u}) \subset E_\lambda(u)$. L'inclusion dans l'autre sens est évidente, donc $E_\lambda(\bar{u}) = E_\lambda(u)$.

CQFD

Z

Pro 2 — Soit E un espace préhilbertien dense dans un espace de Hilbert $\bar{E}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact, normal ($\mathbb{C}$) ou symétrique ($\mathbb{R}$) de E. Les 4 premiers points du théorème de Riesz sont encore vrais : à savoir,

1) $\Lambda(u)$ est fini ou peut être rangé en une suite tendant vers 0.

2) $\Lambda(u)$ est contenu dans $B(0, \|u\|)$ et possède un élément de module $\|u\|$

3) $\forall \lambda \in \Lambda(u)$ sauf peut être pour $\lambda = 0$, $\dim E_\lambda(u) < \infty$

4) Les $E_\lambda(u)$ sont 2 à 2 orthogonaux.

Preuve :

$$\begin{cases} u \in \mathcal{L}(E) & \bar{u} \in \mathcal{L}(\bar{E}) \\ u^* \in \mathcal{L}(E) & \bar{u}^* \in \mathcal{L}(\bar{E}) \end{cases}$$

Pour u compact normal dans un préhilbertien E, $\bar{u}$ sera aussi compact normal dans l'Hilbert $\bar{E}$ et l'on pourra appliquer le théorème de Riesz pour ce $\bar{u}$: la propriété résulte alors de Pro 1.

Vérifions que $u u^* = u^* u \Rightarrow \bar{u}\,\bar{u}^* = \bar{u}^* \bar{u}$.

u normal dans $E \Leftrightarrow u \circ u^* = u^* \circ u$

En passant au prolongement dans $\bar{E}$ pour les 2 membres (ce sont bien des fonctions linéaires continues, et le prolongement est unique) :

$$\bar{u} \circ \overline{u^*} = \overline{u^*} \circ \bar{u}$$

De plus $\overline{u^*} = \bar{u}^*$ puisque $\langle ux, y \rangle = \langle x, u^* y \rangle$

$\Downarrow$ (prolongement)

$\langle \bar{u}x, y \rangle = \langle x, \overline{u^*} y \rangle$

CQFD

Equation de Fredholm

Préliminaire

Si $\mu \neq 0$ n'est pas une valeur propre de u, alors l'équation :

$$u(x) - \mu x = y \qquad y \in E$$

admet une solution unique.

En effet, on suppose u normal compact pour pouvoir appliquer le théorème de Riesz : $E = \bigoplus_\lambda E_\lambda$ et donc $y = \sum_{\lambda \in \Lambda} y_\lambda + y_0$ donné

Posons $x = \sum x_\lambda + x_0$

On veut avoir : $u(x) - \mu x = \sum_\lambda (\lambda - \mu) x_\lambda - \mu x_0 = y$

et donc, nécessairement :

$$\begin{cases} x_\lambda = \dfrac{1}{\lambda - \mu} y_\lambda & (\lambda \neq 0) \\ x_0 = -\dfrac{1}{\mu} y_0 \end{cases}$$

La seule solution possible est : $x = \sum_\lambda \frac{1}{\lambda - \mu} y_\lambda - \frac{1}{\mu} y_0$

Est-elle convenable ?

C.à.d appartient elle à $\bigoplus E_\lambda$? (modulo l'isomorphisme de $\bigoplus E_n$ sur $\bigoplus j_n(E_n)$). Oui car, 0 étant le seul point d'accumulation :

$$\exists \varepsilon > 0 \qquad |\lambda - \mu| > \varepsilon \qquad \forall \lambda \in \Lambda$$

et donc $\sum_\lambda \underbrace{\left|\frac{1}{\lambda - \mu}\right|^2}_{\leq \frac{1}{\varepsilon^2}} \|y_\lambda\|^2 < \infty$ car $\sum_\lambda \|y_\lambda\|^2 < \infty$ (cf. $y \in \bigoplus_\lambda E$

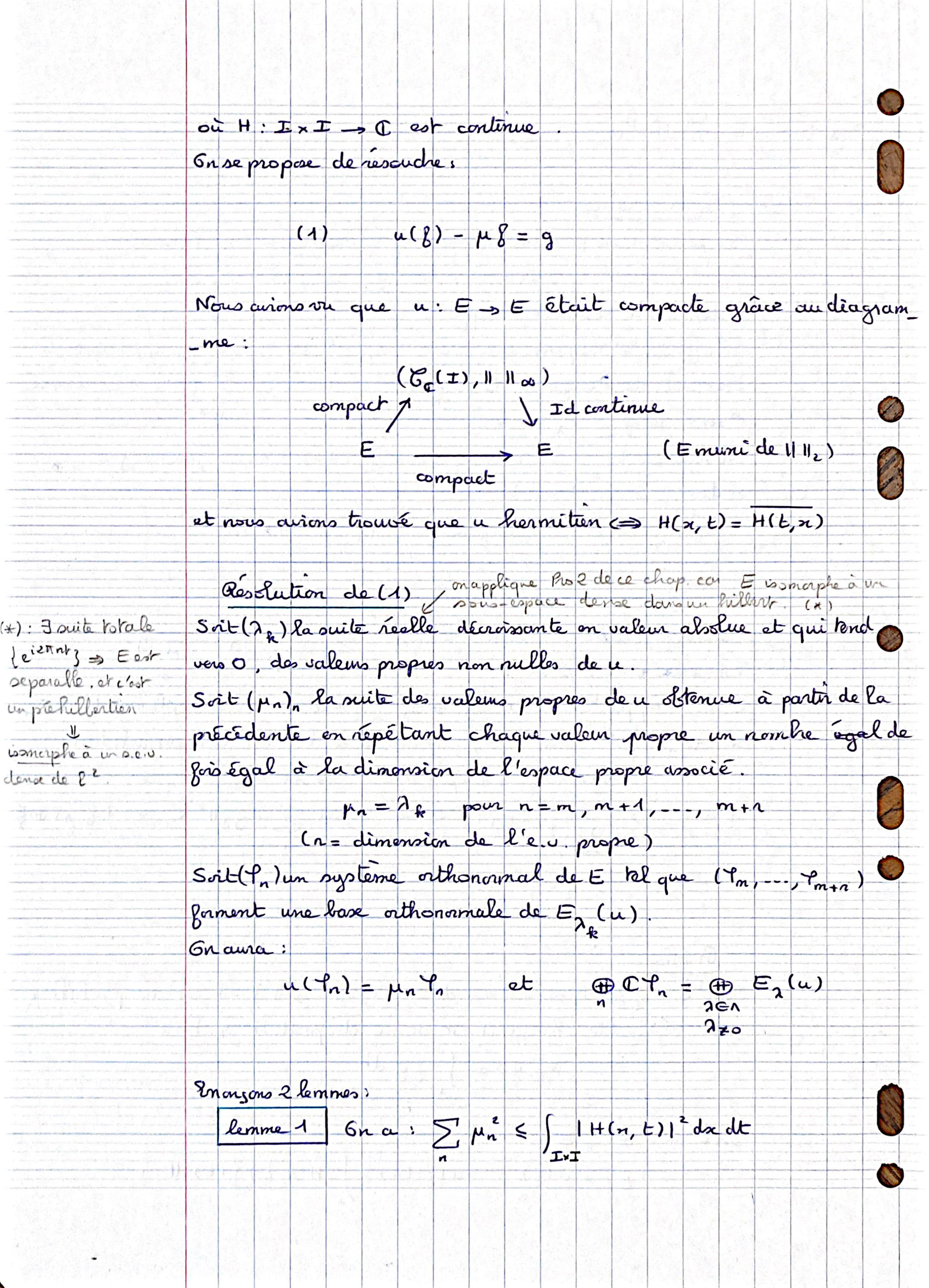
Problème :

Soit $E = \{$fonctions continues de $I = [0,1] \to \mathbb{C}\}$. C'est un préhilbertien séparable lorsqu'il est muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_I f \bar{g} \, dt$$

Soit $u : E \to E$

$$f \mapsto u(f) \;/\; u(f)(x) = \int_0^1 H(x,t) f(t) \, dt$$



où $H : I \times I \to \mathbb{C}$ est continue.

On se propose de résoudre :

$$(1) \qquad u(f) - \mu f = g$$

Nous avions vu que $u : E \to E$ était compacte grâce au diagramme :

et nous avions trouvé que u hermitien $\iff H(x,t) = \overline{H(t,x)}$

<u>Résolution de (1)</u> ← on applique Prop 2 de ce chap. car E isomorphe à un sous-espace dense dans un hilbert. (*)

(*) : ∃ suite totale $\{e^{i2\pi nt}\} \Rightarrow E$ est séparable, et c'est un préhilbertien ⇓ isomorphe à un s.e.v. dense de ℓ^2.

Soit (λ_k) la suite réelle décroissante en valeur absolue et qui tend vers 0, des valeurs propres non nulles de u.

Soit $(\mu_n)_n$ la suite des valeurs propres de u obtenue à partir de la précédente en répétant chaque valeur propre un nombre égal de fois égal à la dimension de l'espace propre associé.

$$\mu_n = \lambda_k \quad \text{pour } n = m, m+1, \dots, m+r$$

$$(r = \text{dimension de l'e.v. propre})$$

Soit (φ_n) un système orthonormal de E tel que $(\varphi_m, \dots, \varphi_{m+r})$ forment une base orthonormale de $E_{\lambda_k}(u)$.

On aura :

$$u(\varphi_n) = \mu_n \varphi_n \qquad \text{et} \qquad \bigoplus_n \mathbb{C}\varphi_n = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq 0}} E_\lambda(u)$$

Énonçons 2 lemmes :

lemme 1 On a : $\displaystyle\sum_n \mu_n^2 \leq \int_{I \times I} |H(x,t)|^2 \, dx\, dt$

$\Psi : I \to \mathbb{C}$ est continue. Écrivons l'inégalité de Bessel
$t \mapsto H(t,x)$ pour cette fonction Ψ :

$F = \bigoplus_n \mathbb{C}\varphi_n$, et, au point Ψ : $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle \Psi, \varphi_n \rangle|^2 \leq \|\Psi\|^2$

c.à.d :

$$\sum_{n \geq 0} \left| \int_0^1 \varphi_n(t) \overline{H(t,x)}\, dt \right|^2 \leq \int_0^1 |H(t,x)|^2\, dt$$

$$\forall N > 0 \quad \sum_{n=0}^{N} \left| \int_0^1 \varphi_n(t) \overline{H(t,x)}\, dt \right|^2 \leq \int_0^1 |H(t,x)|^2\, dt$$

$$\sum_{n=0}^{N} |\underbrace{u(\varphi_n)(x)}_{\mu_n \varphi_n(x)}|^2 \leq \int_0^1 |H(x,t)|^2\, dt \quad \text{car } H(x,t) = \overline{H(t,x)}$$

$$\sum_{n=0}^{N} |\mu_n|^2 |\varphi_n(x)|^2 \leq \int_0^1 |H(x,t)|^2\, dt$$

Intégrons cette inégalité :

$$\forall N > 0 \quad \sum_{n=0}^{N} |\mu_n|^2 \underbrace{\int_0^1 |\varphi_n(x)|^2\, dx}_{=1} \leq \int_{I \times I} |H(x,t)|^2\, dx\, dt$$

CQFD

lemme 2 $\quad g = \sum d_n \varphi_n + g_0 \in E \Rightarrow u(g) = \sum \overbrace{\mu_n d_n}^{c_n} \varphi_n$

et la série $\sum c_n \varphi_n$ converge absolument et uniformément dans I vers $u(g)(t)$

Preuve : $\sum_{n=1}^{N} d_n \varphi_n \longrightarrow g - g_0 \quad (N \to +\infty)$ dans $\bar{E}$

On a le diagramme : $\quad u : E \xrightarrow{\text{compacte}} (\mathcal{C}_c(I), \| \|_\infty)$

et $\exists!$ $\tilde{u}$ prolongeant cet u.

$$E \subset \bar{E}, \quad \tilde{u} : \bar{E} \to (\mathcal{C}_c(I), \| \|_\infty), \quad \text{Id continue} : (\mathcal{C}_c(I), \| \|_\infty) \to \bar{E}, \quad \bar{u} : \bar{E} \to \bar{E}$$

~~$\bar{u}$ est aussi le prolongement de $\tilde{u}$ ...~~

Donc $\tilde{u}\left(\sum_{n=1}^{N} d_n \varphi_n\right) \longrightarrow \tilde{u}(g - g_0) = u(g) \quad (N \to +\infty)$

$$\sum_{n=1}^{N} d_n \mu_n \varphi_n \longrightarrow u(g) \quad (N \to +\infty) \text{ dans } (\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I), \|\ \|_\infty)$$

La convergence uniforme est démontrée.

Convergence absolue :

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |d_n \mu_n \varphi_n(x)|\right)^2 \underset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum_{n=1}^{N} |d_n|^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N} |\mu_n|^2 |\varphi_n(x)|^2\right)$$

$\sum_{n=1}^{N} |d_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 < \infty$ car $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n \in \bigoplus_{\substack{\lambda \neq 0 \\ \lambda \in \Lambda}} E_\lambda$

et donc $\|\sum d_n \varphi_n\|^2 = \sum_{n \geq 0} |d_n|^2 \underbrace{\|\varphi_n\|^2}_{=1}$

$< \infty$ oui.

D'autre part $\sum_{n=1}^{N} |\mu_n|^2 |\varphi_n(x)|^2 \leq \int_{I \times I} |H(x,t)|^2 dx\, dt < \infty$

CQFD

Pro | L'équation en f : (1) $u(f) - \mu f = g$ ($g \in E$ donné)
admet une solution unique donnée par :

$$f(t) = -\frac{1}{\mu} g(t) + \sum_n \frac{\mu_n}{\mu(\mu_n - \mu)} d_n \varphi_n(t)$$

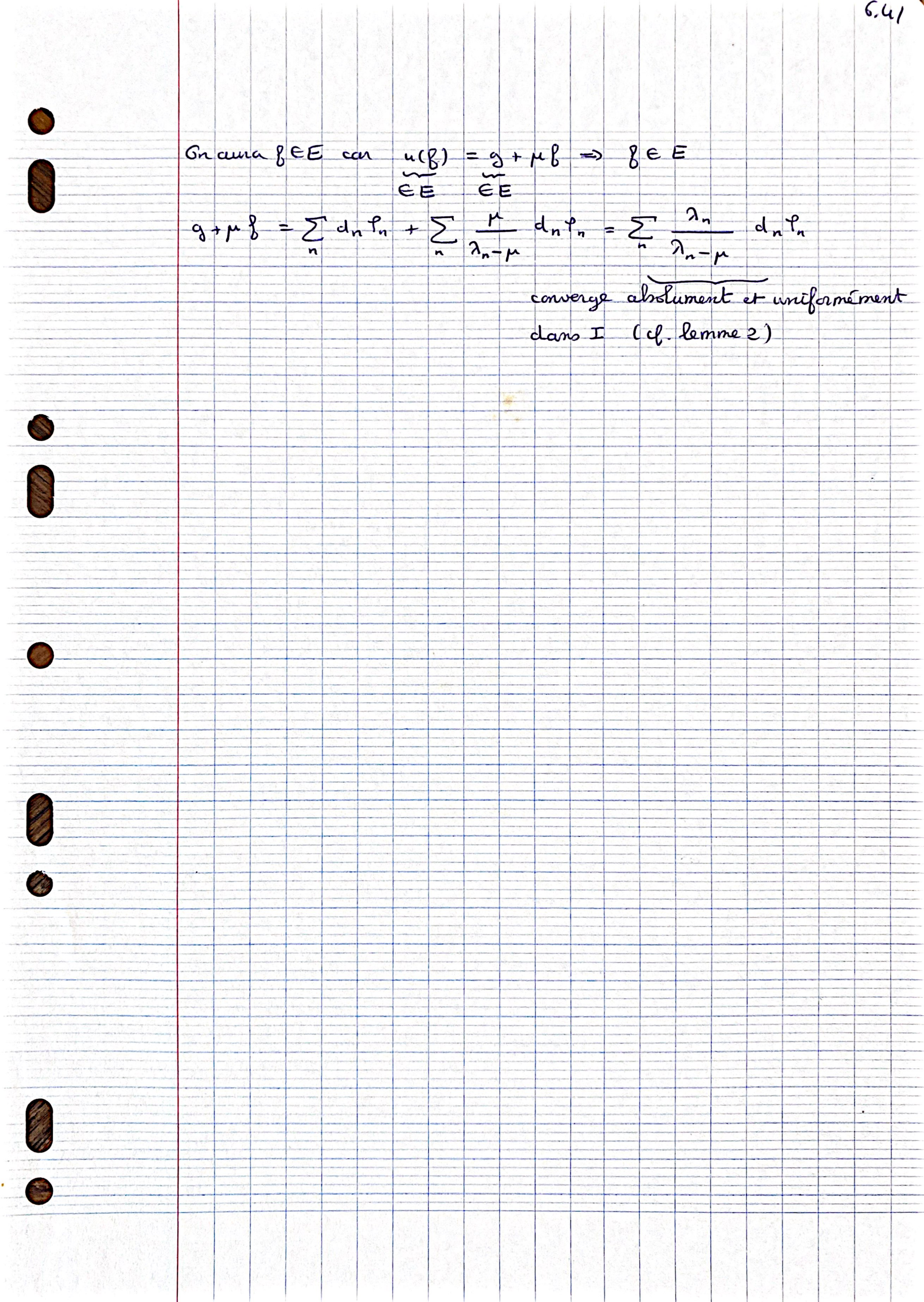
où $\sum_n \frac{\mu_n}{\mu(\mu_n - \mu)}$ converge uniformément et absolument sur I,

et où $d_n = \langle g_n, \varphi_n \rangle$

Démonstration :

D'après le préliminaire de ce paragraphe :

$$f = -\frac{1}{\mu} g_0 + \sum_n \frac{1}{\lambda_n - \mu} d_n \varphi_n \quad (f \in \overline{E})$$



On aura $f \in E$ car $\underbrace{u(f)}_{\in E} = \underbrace{g + \mu f}_{\in E} \Rightarrow f \in E$

$$g + \mu f = \sum_n d_n \varphi_n + \sum_n \frac{\mu}{\lambda_n - \mu} d_n \varphi_n = \sum_n \underbrace{\frac{\lambda_n}{\lambda_n - \mu}}\, d_n \varphi_n$$

converge absolument et uniformément dans I (cf. lemme 2)